Die linear-unabhängigen quadratischen Relationen zwischen den zum Kurvengeschlecht $p=8$ gehörigen Formen φ.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

der

hohen philosophischen Facultät der Universität Erlangen

vorgelegt von

Leonhard Käsbohrer,
Kgl. Reallehrer.

Nürnberg.
Kgl. Bayer. Hofbuchdruckerei G. P. J. Bieling-Dietz.
1893.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41535711_0084

Die

linear-unabhängigen quadratischen Relationen zwischen den zum Kurvengeschlecht $p=8$ gehörigen Formen φ.

Von

Leonhard Käsbohrer.

Einleitung.

Eine einzelne algebraische Kurve $f(x_1 x_2 x_3) = 0$ bestimmt eine Klasse von Kurven, welche alle durch rationale eindeutige Transformation aus der Grundkurve abzuleiten sind. Alle Kurven einer Klasse haben dasselbe Geschlecht p; nach Riemann hat die Klasse (3p—3) Moduln oder absolute Invarianten.

Geht man von einer allgemeinen Kurve vom Geschlechte 8 mit 21 nicht speziellen Moduln aus, so bekommt man nach dem Aufsatze der Herren Brill und Noether — Mathematische Annalen Band VII — eine invariante Darstellung, indem man mit Hülfe der φ Kurven eine Transformation

$$y_1 : y_2 : \cdots : y_p = \varphi_1 : \varphi_2 : \cdots : \varphi_p$$

ausführt. Man erhält dann die sogenannte Normalkurve im (p—1) dimensionalen Raum. Die so entstandenen Gleichungen zwischen den φ muss man dann linear umformen, damit sie nur noch die 21 Moduln als Konstanten enthalten.

Unter diesen Gleichungen sind, worauf Herr Weber — Mathem. Annalen Band XIII — zuerst hingewiesen hat, die quadratischen Relationen besonders bemerkenswert. Nach Herrn Noether beträgt ihre Anzahl genau $\frac{1}{2}(p-2)(p-3)$ — Mathem. Annalen Band XVII —. Diese quadratischen Relationen bestimmen schon im allgemeinen Fall ($p > 4$) die Klasse von algebraischen Gebilden.

Bisher sind behandelt $p = 5$ von Herrn Weber — Mathem. Annalen Band XIII — und $p = 5, 6$ und 7 von Herrn Noether — Mathem. Annalen Band XXVI —.

In der hier folgenden Arbeit behandle ich nun dieselbe Aufgabe für $p = 8$ und zwar im wesentlichen auf dem von Herrn Noether eingeschlagenen Weg.

Ich lege nämlich der Rechnung eine Kurve achter Ordnung mit 2 dreifachen und 7 Doppelpunkten zu grunde. Das ist erlaubt, weil man nach Riemann und nach Brill-Noether als Vertreter der allgemeinen Klasse $p = 8$ eine Kurve 10ter Ordnung mit 2 fünffachen und 8 Doppelpunkten annehmen darf und diese Kurve dann durch quadratische Transformation auf obengenannte Kurve zurückführen kann.

Fixiert man vermöge der acht Konstanten der linearen ebenen Transformation die 2 dreifachen Punkte und zwei der Doppelpunkte, so hat diese Kurve 8ter Ordnung gerade noch 21 willkürliche Parameter, welche man als die Moduln betrachten könnte.

Mein Gang weicht jedoch darin von dem des Herrn Noether ab, dass ich die Gleichung $f_8 = 0$ zunächst nicht aufstelle, sondern nur die 10 Parameter der noch übrigen 5 Doppelpunkte benütze und sie als Moduln mitnehme. Damit kann ich — § 1 — die φ durch die Koordinaten der vielfachen Punkte ausdrücken und von den fünfzehn existierenden, linear von einander unabhängigen, quadratischen Relationen elf berechnen. Diese Berechnung geschieht hier in Erweiterung des Noether'schen Ganges in völlig systematischer Weise, indem — § 2 — successive die Produkte $\varphi_1^2, \varphi_1\varphi_2, \varphi_2^2, \varphi_1\varphi_3, \varphi_2\varphi_3, \varphi_3^2 \ldots\ldots \varphi_8^2$ gebildet, und die zwischen ihnen bestehenden elf quadratischen Relationen aufgestellt werden.

Durch Eliminationsprozesse — § 3 — werden diese 11 Relationen auf fünf zurückgeführt.

Die weiteren vier Relationen müssen nun — geometrisch ausgedrückt — die noch nicht benützte Kurve f_8 multipliziert mit einem beliebigen Kegelschnitte durch die 2 dreifachen Punkte von f_8 vorstellen. Ich nehme daher eine quadratische Relation der φ mit unbestimmten Koeffizienten und zerfälle dieselbe in das Produkt eines bestimmten Kegelschnittes durch die zwei dreifachen Punkte mit der gesuchten Kurve f_8 — § 4 —. Dadurch bekomme ich nicht nur die Gleichung $f_8 = 0$ der

Grundkurve, von welcher ich ausgegangen bin, sondern auch die zwölfte quadratische Relation mit den zu den schon vorhandenen zehn noch neu hinzutretenden elf Moduln.

Die noch übrigen drei Relationen ergeben sich mir aus dem Verhältnis der der Grundkurve f_8 noch hinzuzufügenden und durch die 3fachen Punkte von f_8 gehenden, von einander linear unabhängigen Kegelschnitte — in § 5, § 6 und § 7 sind die Koeffizienten dieser Relationen berechnet. —

Diese Ableitung ergibt dann auch, dass die drei letzten Relationen Folgen der zwölften Relation sind.

Damit sind nun die fünfzehn linear von einander unabhängigen quadratischen Relationen nicht nur abgeleitet, und zwar in einer Form, welche nur die 21 Moduln enthält, sondern sie sind auch auf ihre geringste Anzahl — nämlich sechs — von notwendigen Definitionsgleichungen zurückgeführt.

An dieser Stelle sei es mir nun gestattet, Herrn Professor Dr. Noether für Stellung dieses Themas und für sein reges Interesse bei Ausarbeitung desselben meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

---

§ 1.

Fixierung der festen Punkte. Aufstellung der φ.

Als Grundkurve vom Geschlechte 8 nehme ich eine Kurve 8ter Ordnung, welche die Punkte A und B als dreifache, die Punkte C, E sowie fünf weitere Punkte 1, 2, 3, 4 und 5 als zweifache Punkte besitzt. Dabei sind die gewählten Punkte auf folgende Art fixiert: A hat die Koordinaten $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$; B die Koordinaten $x_1 = 0$ und $x_3 = 0$; C die Koordinaten $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$; E hat die Koordinaten $x_1 = x_2 = x_3 = 1$; die fünf Punkte 1, 2, 3, 4 und 5 bilden den beweglichen Schnitt zweier Kurven C_3 und C_3' von der 3ten Ordnung, von welchen die eine den Punkt A als zweifachen und den

Punkt B als einfachen Punkt besitzt, während die andere durch A einfach, aber durch B doppelt hindurchgehen soll.

$C_3 \equiv x_1 x_2^2 + a x_1 x_2 x_3 + b x_1 x_3^2 + d x_2 x_3^2 + f x_3^3 = 0;$

$C_3' \equiv x_1^2 + a' x_1 x_2 x_3 + b' x_2 x_3^2 + d' x_1 x_3^2 + f' x_3^3 = 0.$

Die zu dieser Grundkurve f_8 adjungierten Kurven φ sind von der fünften Ordnung, gehen durch A und B je zweifach, dagegen durch die Punkte C, E, 1, 2, 3, 4 und 5 je einfach.

Es gibt 8 linear von einander unabhängige Kurven φ; als solche wähle ich nun folgende 8 Kurven:

$\varphi_1 \equiv x_1(x_2 - x_3) \cdot C_3;$

$\varphi_2 \equiv x_2(x_1 - x_3) \cdot C_3;$

$\varphi_3 \equiv x_1(x_1 - x_3) \cdot C_3;$

$\varphi_4 \equiv x_2(x_1 - x_3) \cdot C_3';$

$\varphi_5 \equiv x_1(x_2 - x_3) \cdot C_3';$

$\varphi_6 \equiv x_2(x_2 - x_3) \cdot C_3';$

$\varphi_7 \equiv x_1 x_2 (g' C_3 - g C_3'),$

wo $g = 1 + a + b + c + d + f$ und $g' = 1 + a' + b' + c' + d' + f'$, endlich $\varphi_8 \equiv (x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(f' C_3 - f C_3')$.

Diese gewählten 8 Kurven gehen durch jeden der oben fixierten neun Punkte hindurch und zwar durch jeden wenigstens in der verlangten Vielfachheit. Ferner sind sie linear von einander unabhängig.

§ 2.

Aufsuchung der ersten elf Relationen.

Nun bilde ich alle Produkte $\varphi_i \cdot \varphi_k$ — es gibt deren 36 — und untersuche, ob sich ein solches Produkt durch andere ausdrücken lässt, eventuell durch welche.

1) $\varphi_1^2 \equiv x_1^2(x_2 - x_3) C_3^2 \equiv (x_1^2 x_2^2 - 2 x_1^2 x_2 x_3 + x_1^2 x_3^2) C_3^2.$ —

2) $\varphi_1 \varphi_2 \equiv x_1 x_2 (x_1 - x_3)(x_2 - x_3) C_3^2$
$\equiv (x_1^2 x_2^2 - x_1^2 x_2 x_3 - x_1 x_2^2 x_3 + x_1 x_3^2 x_3^2) C_3^2.$ —

3) $\varphi_2^2 \equiv x_2^2 (x_1 - x_3)^2 C_3^2 \equiv (x_1^2 x_2^2 - 2 x_1 x_2^2 x_3 + x_2^2 x_3^2) C_3^2.$ —

4) $\varphi_1 \varphi_3 \equiv x_1^2 (x_1 - x_3)(x_2 - x_3) C_3^2$
$\equiv (x_1^3 x_2 - x_1^3 x_3 - x_1^2 x_2 x_3 + x_1^2 x_3^2) \cdot C_3^2.$ —

5) $\varphi_2 \varphi_3 \equiv x_1 x_2 (x_1 - x_3)^2 C_3^2 \equiv (x_1^3 x_2 - 2 x_1^2 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3^2) C_3^2.$ —

6) $\varphi_3^2 \equiv x_1^2 (x_1 - x_3)^2 C_3^2 \equiv (x_1^4 - 2 x_1^3 x_3 + x_1^2 x_3^2) C_3^2.$ —

Zwischen diesen sechs Produkten besteht keine Relation.

7) $\varphi_1\varphi_4 \equiv x_1x_2(x_1-x_3)(x_2-x_3)C_3C_3'$
$\equiv (x_1^2x_2^2-x_1^2x_2x_3-x_1x_2^2x_3+x_1x_2x_3^2)C_3C_3'$. —

Sollte nun unter diesen 7 Produkten eine Relation bestehen, so müssten sich 7 Grössen α so bestimmen lassen, dass bestände die Identität

$\alpha_1\cdot\varphi_1^2+\alpha_2\varphi_1\varphi_2+\alpha_3\cdot\varphi_2^2+\alpha_4\varphi_1\varphi_3+\alpha_5\varphi_2\varphi_3+\alpha_6\varphi_3^2+\alpha_7\varphi_1\varphi_4=0$
oder $\{\alpha_6x_1^4+(\alpha_4+\alpha_5)\cdot x_1^3x_2-(\alpha_4+2\alpha_6)\cdot x_1^3x_3+(\alpha_1+\alpha_2+x_3)\cdot x_1^2x_2^2$
$-(2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4+2\alpha_5)\cdot x_1^2x_2x_3+(\alpha_1+\alpha_4+\alpha_6)\cdot x_1^2x_3^2-(\alpha_2+2\alpha_3)$
$\cdot x_1x_2^2x_3+(\alpha_2+\alpha_5)\cdot x_1x_2x_3^2\}\cdot C_3^2+\alpha_7\cdot x_1x_2(x_1-x_3)(x_2-x_3)C_3C_3'$
$=0$; der erste Summand der linken Seite ist durch C_3^2 teilbar, also müsste es auch der zweite sein, also müsste auch $x_1x_2(x_1-x_3)(x_2-x_3)$ durch C_3 sich teilen lassen, was unmöglich ist; daher gibt es keine Relation.

8) $\varphi_2\varphi_4 \equiv x_2^2(x_1-x_3)^2C_3C_3' \equiv (x_1^2x_2^2-2x_1x_2^2x_3+x_2^2x_3^2)\cdot C_3C'_3$. —
Keine Relation.

9) $\varphi_3\varphi_4 \equiv x_1x_2(x_1-x_3)^2C_3C_3' \equiv (x_1^3x_2-2x_1^2x_2x_3+x_1x_2x_3^2)\cdot C_3C_3'$. –
Keine Relation.

10) $\varphi_4^2 \equiv x_2^2(x_1-x_3)^2C_3'^2 \equiv (x_1^2x_2^2-2x_1x_2^2x_3+x_2^2x_3^2)\cdot C_3'^2$. —

11) $\varphi_1\varphi_5 \equiv x_1^2(x_2-x_3)^2C_3C_3' \equiv (x_1^2x_2^2-2x_1^2x_2x_3+x_1^2x_3^2)C_3C_3'$. —
Keine Relation.

12) $\varphi_2\varphi_5 \equiv x_1x_2(x_1-x_3)(x_2-x_3)C_3C_3' \equiv (x_1^2x_2^2-x_1^2x_2x_3-x_1x_2^2x_3$
$+x_1x_2x_3^2)C_3C_3'$. —

Gibt es eine Gleichung zwischen den 12 Produkten?
$\{\alpha_6x_1^4+(\alpha_4+\alpha_5)\cdot x_1^3x_2-(\alpha_4+2\alpha_6)x_1^3x_3+(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)x_1^2x_2^2-$
$(2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4+2\alpha_5)\cdot x_1^2x_2x_3+(\alpha_1+\alpha_4+\alpha_6)\cdot x_1^2x_3^2-(\alpha_2+2\alpha_3)\cdot x_1x_2^2x_3$
$+(\alpha_2+\alpha_5)\cdot x_1x_2x_3^2+\alpha_3\cdot x_2^2x_3^2\}\cdot C_3^2+\{\alpha_9\cdot x_1^3x_2+(\alpha_7+\alpha_8+\alpha_{12})$
$\cdot x_1^2x_2^2-(\alpha_7+2\alpha_9+\alpha_{12})\cdot x_1^2x_2x_3-(\alpha_7+2\alpha_8+\alpha_{12})\cdot x_1x_2^2x_3$
$+(\alpha_7+\alpha_9+\alpha_{12})\cdot x_1x_2x_3^2+\alpha_8\cdot x_2^2x_3^2\}\cdot C_3C_3'+\{\alpha_{10}\cdot x_1^2x_2^2-2\alpha_{10}$
$\cdot x_1x_2^2x_3+\alpha_{10}\cdot x_2^2x_3^2\}\cdot C_3'^2=0$. —

Der erste Faktor des 3ten Summanden der linken Seite muss verschwinden, da er nicht durch C_3 teilbar ist, also $\alpha_{10}=0$; der erste Faktor des 1ten Summanden der linken Seite muss ebenfalls verschwinden, da er nicht durch C_3' teilbar ist, also $\alpha_6=\alpha_3=\alpha_4=\alpha_5=\alpha_1=\alpha_2=0$; es muss nun auch links verschwinden der erste Faktor des 2ten Summanden,

also $\alpha_9 = 0$; $\alpha_8 = 0$; $\alpha_7 = -\alpha_{12}$; also hat man gefunden die erste quadratische Relation

$\varphi_1\varphi_4 - \varphi_2\varphi_5 = 0$, welche man unmittelbar aus der Wahl der φ_i als richtig erkennt.

13) $\varphi_3\varphi_5 = x_1^2(x_1-x_2)(x_2-x_3)C_3C_3'$
$= (x_1^3x_2 - x_1^3x_3 - x_1^2x_2x_3 + x_1^2x_3^2)\cdot C_3C_3'. -$

Stellt man eine ähnliche Untersuchung an wie im vorigen Falle, so stellt sich heraus, dass $\varphi_3\varphi_5$ durch die früheren Produkte nicht darstellbar ist.

14) $\varphi_4\varphi_5 = x_1x_2(x_1-x_3)(x_2-x_3)\cdot C_3'^2$
$= (x_1^2x_2^2 - x_1^2x_2x_3 - x_1x_2^2x_3 + x_1x_2x_3^2)\cdot C_3'^2. -$

Hier keine Relation; Untersuchung wie vorher.

15) $\varphi_5^2 = x_1^2(x_2-x_3)^2\cdot C_3'^2$
$= (x_1^2x_2^2 - 2x_1^2x_2x_3 + x_1^2x_3^2)\cdot C_3'^2. -$

Keine Relation; Untersuchung wie vorher.

16) $\varphi_1\varphi_6 = x_1x_2(x_2-x_3)^2C_3C_3'$
$= (x_1x_2^3 - 2x_1x_2^2x_3 + x_1x_2x_3^2)\cdot C_3C_3'. -$

Keine Relation; Untersuchung wie vorher.

17) $\varphi_2\varphi_6 = x_2^2(x_1-x_3)(x_2-x_3)\cdot C_3C_3'$
$= (x_1x_2^3 - x_1x_2^2x_3 - x_2^3x_3 + x_2^2x_3^2)\cdot C_3C_3'. -$

Keine Relation; Untersuchung wie vorher.

18) $\varphi_3\varphi_6 = x_1x_2(x_1-x_3)(x_2-x_3)\cdot C_3C_3'$
$= (x_1^2x_2^2 - x_1^2x_2x_3 - x_1x_2^2x_3 + x_1x_2x_3^2)\cdot C_3C_3'. -$

Soll eine Relation bestehen, so muss sein:

$$\begin{aligned}
&\{\alpha_6\cdot x_1^4 + (\alpha_4+\alpha_5)\cdot x_1^3x_2 - (\alpha_4+2\alpha_6)\cdot x_1^3x_3 + (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\cdot x_1^2x_2^2\\
&-(2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4+2\alpha_5)\cdot x_1^2x_2x_3 + (\alpha_1+\alpha_4+\alpha_6)\cdot x_1^2x_3^2\\
&-(\alpha_2+2\alpha_3)\cdot x_1x_2^2x_3 + (\alpha_2+\alpha_5)\cdot x_1x_2x_3^2 + \alpha_3\cdot x_2^2x_3^2\}\cdot C_3^2\\
&+\{(\alpha_9+\alpha_{13})x_1^3x_2 - \alpha_{13}\cdot x_1^3x_3 + (\alpha_7+\alpha_8+\alpha_{11}+\alpha_{18})\cdot x_1^2x_2^2\\
&-(\alpha_7+2\alpha_9+2\alpha_{11}+\alpha_{13}+\alpha_{18})\cdot x_1^2x_2x_3 + (\alpha_{11}+\alpha_{13})\cdot x_1^2x_3^2 +\\
&(\alpha_{16}+\alpha_{17})\cdot x_1x_2^3 - (\alpha_7+2\alpha_8+2\alpha_{16}+\alpha_{17}+\alpha_{18})\cdot x_1x_2^2x_3 +\\
&(\alpha_7+\alpha_9+\alpha_{16}+\alpha_{18})\cdot x_1x_2x_3^2 + (\alpha_8+\alpha_{17})\cdot x_2^2x_3^2 - \alpha_{17}\cdot x_2^3x_3\}\cdot C_3C_3'\\
&+\{(\alpha_{10}+\alpha_{14}+\alpha_{15})\cdot x_1^2x_2^2 - (\alpha_{14}+2\alpha_{15})\cdot x_1^2x_2x_3 + \alpha_{15}\cdot x_1^2x_3^2\\
&-(2\alpha_{10}+\alpha_{14})\cdot x_1x_2^2x_3 + \alpha_{14}\cdot x_1x_2x_3^2 + \alpha_{10}\cdot x_2^2x_3^2\}\cdot C_3'^2 = 0. -
\end{aligned}$$

Links muss der Koeffizient von $C_3'^2$ verschwinden, da er durch C_3 nicht teilbar ist; also $\alpha_{10} = \alpha_{14} = \alpha_{15} = 0$; ferners muss verschwinden der Koeffizient von C_3^2, weil er durch C_3' nicht teilbar ist; also $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = 0$; weil nun

aber die Koeffizienten des ersten und dritten Gliedes verschwinden, so muss auch der vom zweiten Gliede identisch verschwinden, was folgende Gleichungen bedingt:

$$\alpha_8 = \alpha_9 = \alpha_{11} = \alpha_{13} = \alpha_{16} = \alpha_{17};\ \alpha_7 + \alpha_{18} = 0;$$

also ist hiemit gefunden eine zweite quadratische Relation der φ:

$$\varphi_1\varphi_4 = \varphi_3\varphi_6,$$

welche auch unmittelbar als richtig erkannt wird.

19) $\varphi_4\varphi_6 \equiv x_2^2(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)\cdot C_3'^2$
$\equiv (x_1x_2^3 - x_1x_2^2x_3 - x_2^3x_3 + x_2^2x_3^2)\cdot C_3'^2.$ —

Stellt man dieselbe Untersuchung an wie vorhin, so erkennt man, dass sich $\varphi_4\varphi_6$ durch die vorhergehenden Produkte nicht ausdrücken lässt.

20) $\varphi_5\varphi_6 \equiv x_1x_2(x_2 - x_3)^2\cdot C_3'^2$
$\equiv (x_1x_2^3 - 2x_1x_2^2x_3 + x_1x_2x_3^2)\cdot C_3'^2.$ —

Auch hier keine Relation.

21) $\varphi_6^2 \equiv x_2^2(x_2 - x_3)^2\cdot C_3'^2$
$\equiv (x_2^4 - 2x_2^3x_3 + x_2^2x_3^2)\cdot C_3'^2.$ —

Liefert keine Relation.

22) $\varphi_1\varphi_7 \equiv x_1^2x_2(x_2 - x_3)(g'C_3^2 - gC_3C_3')$
$\equiv (x_1^2x_2^2 - x_1^2x_2x_3)(g'C_3^2 - gC_3C_3').$ —

Keine Relation.

23) $\varphi_2\varphi_7 \equiv x_1x_2^2(x_1 - x_3)(g'C_3^2 - gC_3C_3')$
$\equiv (x_1^2x_2^2 - x_1x_2^2x_3)(g'C_3^2 - gC_3C_3').$ —

Keine Relation.

24) $\varphi_3\varphi_7 \equiv x_1^2x_2(x_1 - x_3)(g'C_3^2 - gC_3C_3')$
$\equiv (x_1^3x_2 - x_1^2x_2x_3)(g'C_3^2 - gC_3C_3').$ —

Untersuchung bezüglich einer Relation.

$$\Big\{K_4 + g'\alpha_{22}(x_1^2x_2^2 - x_1^2x_2x_3) + g'\alpha_{23}(x_1^2x_2^2 - x_1x_2^2x_3) +$$
$$g'\alpha_{24}\cdot(x_1^3x_2 - x_1^2x_2x_3)\Big\}\cdot C_3^2$$
$$+\Big\{K_4' - g\alpha_{22}(x_1^2x_2^2 - x_1^2x_2x_3) - g\alpha_{23}(x_1^2x_2^2 - x_1x_2^2x_3) -$$
$$g\alpha_{24}\cdot(x_1^3x_2 - x_1^2x_2x_3)\Big\}\cdot C_3C_3'$$
$$+K_4''\cdot C_3'^2 = 0,$$

wo $K_4 \equiv \alpha_6\cdot x_1^4 + (\alpha_4 + \alpha_5)\ x_1^3x_2 - (\alpha_4 + 2\alpha_6)\cdot x_1^3x_3$
$+(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\cdot x_1^2x_2^2 - (2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 + 2\alpha_5)\cdot x_1^2x_2x_3$
$+(\alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_6)\cdot x_1^2x_3^2 - (\alpha_2 + 2\alpha_3)\cdot x_1x_2^2x_3 + (\alpha_2 + \alpha_5)\cdot x_1x_2x_3^2$
$+\alpha_3x_2^2x_3^2,$

$K_4' \quad (\alpha_9+\alpha_{13})\cdot x_1^3x_2-\alpha_{13}x_1^3x_3+(\alpha_7+\alpha_8+\alpha_{11})x_1^2x_2^2$
$-(\alpha_7+2\alpha_9+2\alpha_{11}+\alpha_{13})\cdot x_1^2x_2x_3+(\alpha_{11}+\alpha_{13})\cdot x_1^2x_3^2+(\alpha_{16}+\alpha_{17})$
$\cdot x_1x_2^3-(\alpha_7+2\alpha_8+2\alpha_{16}+\alpha_{17})\ x_1x_2^2x_3$
$+(\alpha_7+\alpha_9+\alpha_{16})\cdot x_1x_2x_3^2+(\alpha_8+\alpha_{17})\cdot x_2^2x_3^2-\alpha_{17}\cdot x_2^3x_3,$
$K_4''\equiv(\alpha_{10}+\alpha_{14}+\alpha_{15})\cdot x_1^2x_2^2-(\alpha_{14}+2\alpha_{15})\cdot x_1^2x_2x_3$
$+\alpha_{15}x_1^2x_3^2+(\alpha_{19}+\alpha_{20})\ x_1x_2^3-(2\alpha_{10}+\alpha_{14}+\alpha_{19}+2\alpha_{20})\cdot x_1x_2^2x_3$
$+(\alpha_{14}+\alpha_{20})\cdot x_1x_2x_3^2+(\alpha_{10}+\alpha_{19}+\alpha_{21})\cdot x_2^2x_3^2-(\alpha_{19}+2\alpha_{21})\cdot x_2^2x_3$
$+\alpha_{21}\cdot x_2^4.$

K_4'' ist nicht durch C_3 teilbar, also muss es identisch verschwinden, also $\alpha_{10}=\alpha_{14}=\alpha_{15}=\alpha_{19}=\alpha_{20}=\alpha_{21}=0$;

K_4 ist nicht durch C_3' teilbar, also muss es auch identisch Null werden, und es bestehen folgende Gleichungen:

$$\alpha_6=0;$$
$$\alpha_1+\alpha_5+g'\alpha_{24}=0;$$
$$\alpha_4+2\alpha_6=0;$$
$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+g'\alpha_{22}+g'\alpha_{23}=0;$$
$$2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4+2\alpha_5+g'\alpha_{22}+g'\alpha_{24}=0;$$
$$\alpha_1+\alpha_4+\alpha_6=0;$$
$$\alpha_2+2\alpha_3+g'\alpha_{23}=0;$$
$$\alpha_2+\alpha_5=0;$$
$$\alpha_3=0;$$

woraus man erhält: $\alpha_3=\alpha_1=\alpha_4=\alpha_6=\alpha_{22}=0;$

$$\alpha_2=-\alpha_5=-g'\alpha_{23}=g'\alpha_{24};$$

jetzt muss auch noch verschwinden der Faktor von C_3C_3', daher:

$$\alpha_9+\alpha_{13}-g\alpha_{24}=0;$$
$$\alpha_{13}=0;$$
$$\alpha_7+\alpha_8+\alpha_{11}-g\alpha_{22}-g\alpha_{23}=0;$$
$$\alpha_7+2\alpha_9+2\alpha_{11}+\alpha_{13}-g\alpha_{22}-g\alpha_{24}=0;$$
$$\alpha_{11}+\alpha_{13}=0;$$
$$\alpha_{16}+\alpha_{17}=0;$$
$$\alpha_7+2\alpha_8+2\alpha_{16}+\alpha_{17}-g\alpha_{23}=0;$$
$$\alpha_7+\alpha_9+\alpha_{16}=0;$$
$$\alpha_8+\alpha_{17}=0;$$

hieraus die Lösungen: $\alpha_8=\alpha_{11}=\alpha_{13}=\alpha_{16}=\alpha_{17}=\alpha_{22}=0;$

$$-\alpha_7=\alpha_9=g\alpha_{24} \text{ und } \alpha_{23}=-\alpha_{24}.$$

So hat man nun erhalten die dritte quadratische Relation:

$$(g'\varphi_2-g\varphi_4)(\varphi_1-\varphi_3)-\varphi_7(\varphi_2-\varphi_3)=0.$$

25) $\varphi_4\varphi_7 \equiv x_1x_2^2(x_1-x_3)(g'C_3C_3'-gC_3'^2)$
$\equiv (x_1^2x_2^2-x_1x_2^2x_3)(g'C_3C_3'-gC_3'^2)$. —

Eine ähnliche Untersuchung, wie vorhin, zeigt, dass hier keine Relation existiert.

26) $\varphi_5\varphi_7 \equiv x_1^2x_2(x_2-x_3)(g'C_3C_3'-gC_3'^2)$
$\equiv (x_1^2x_2^2-x_1^2x_2x_3)(g'C_3C_3'-gC_3'^2)$. —
Keine Relation.

27) $\varphi_6\varphi_7 \equiv x_1x_2^2(x_2-x_3)(g'C_3C_3'-gC_3'^2)$
$\equiv (x_1x_2^3-x_1x_2^2x_3)(g'C_3C_3'-gC_3'^2)$. —

Durch das analoge Verfahren wie in Nr. 24 findet man die 4te Relation:

$$(g'\varphi_1-g\varphi_5)(\varphi_4-\varphi_6)-\varphi_7(\varphi_5-\varphi_6)\equiv 0. —$$

28) $\varphi_7^2 \equiv x_1^2x_2^2(g'^2C_3^2-2gg'C_3C_3'+g^2C_3'^2.)$ —
Keine Relation.

29) $\varphi_1\varphi_8 \equiv x_1(x_2-x_3)^2\cdot(f'C_3^2-fC_3C_3')$
$\equiv (x_1^2x_2^2-2x_1^2x_2x_3+x_1^2x_3^2-x_1x_2^2x_3+2x_1x_2x_3^2-x_1x_3^3)$
$\cdot(f'C_3^2-fC_3C_3')$. —
Keine Relation.

30) $\varphi_2\varphi_8 \equiv x_2(x_2-x_3)(x_1-x_3)^2(f'C_3^2-fC_3C_3')$
$\equiv (x_1^2x_2^2-2x_1x_2^2x_3+x_2^2x_3^2-x_1^2x_2x_3+2x_1x_2x_3^2-x_2x_3^3)$
$\cdot(f'C_3^2-fC_3C_3')$. —

Untersuchung bezüglich einer Relation, wo K_4, K_4' und K_4'' die bei No. 24 angegebene Bedeutung besitzen.

$$\{K_4+g'\alpha_{22}(x_1^2x_2^2-x_1^2x_2x_3)+g'\alpha_{23}(x_1^2x_2^2-x_1x_2^2x_3)+g'^2\alpha_{28}$$
$$\cdot x_1^2x_2^2+f'\alpha_{29}\cdot(x_1^2x_2^2-2x_1^2x_2x_3+x_1^2x_3^2-x_1x_2^2x_3+2x_1x_2x_3^2$$
$$-x_1x_3^3)+f'\alpha_{30}\cdot(x_1^2x_2^2-2x_1x_2^2x_3+x_2^2x_3^2-x_1^2x_2x_3+2x_1x_2x_3^2$$
$$-x_2x_3^3)\}\cdot C_3^2$$
$$+\{K_4'-g\alpha_{22}(x_1^2x_2^2-x_1^2x_2x_3)-g\alpha_{23}(x_1^2x_2^2-x_1x_2^2x_3)+g'\alpha_{25}$$
$$\cdot(x_1^2x_2^2-x_1x_2^2x_3)+g'\alpha_{26}\cdot(x_1^2x_2^2-x_1^2x_2x_3)-2gg'\alpha_{28}\cdot x_1^2x_2^2$$
$$-f\alpha_{29}(x_1^2x_2^2-2x_1^2x_2x_3+x_1^2x_3^2-x_1x_2^2x_3+2x_1x_2x_3^2-x_1x_3^3)$$
$$-f\alpha_{30}\cdot(x_1^2x_2^2-2x_1x_2^2x_3+x_2^2x_3^2-x_1^2x_2x_3+2x_1x_2x_3^2-x_2x_3^3)\}\cdot C_3C_3'$$
$$+\{K_4''-g\alpha_{25}(x_1^2x_2^2-x_1x_2^2x_3)-g\alpha_{26}(x_1^2x_2^2-x_1^2x_2x_3)+g^2\alpha_{28}x_1^2x_2^2\}\cdot C_3'^2$$
$$\equiv 0. —$$

Der Koeffizient von $C_3'^2$ muss hier verschwinden; daher

$$\alpha_{10}=\alpha_{14}=\alpha_{15}=\alpha_{19}=\alpha_{20}=\alpha_{21}=\alpha_{25}=\alpha_{26}=\alpha_{28}=0. —$$

Der Faktor von C_3^2 ist ein Vielfaches von C_3', ist hier identisch mit $(u_1x_1+u_2x_2)C_3'$.

Die Koeffizientenvergleichung liefert folgende Relationen:

$$\alpha_6 = 0;$$
$$\alpha_4+\alpha_5 = u_1;$$
$$-\alpha_4-2\alpha_6 = c'u_1;$$
$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+g'\alpha_{22}+g'\alpha_{23}+g'^2\alpha_{28}+f'\alpha_{29}+f'\alpha_{30} = u_2;$$
$$-2\alpha_1-\alpha_2-\alpha_4-2\alpha_5-g'\alpha_{22}-2f'\alpha_{29}-f'\alpha_{30} = a'u_1+c'u_2;$$
$$\alpha_1+\alpha_4+f'\alpha_{29} = d'u_1;$$
$$-\alpha_2-2\alpha_3-g'\alpha_{23}-f'\alpha_{29}-2f'\alpha_{30} = a'u_2;$$
$$\alpha_2+\alpha_5+2f'\alpha_{29}+2f'\alpha_{30} = b'u_1+d'u_2;$$
$$-f'\alpha_{29} = f'u_1;$$
$$\alpha_3+f'\alpha_{30} = b'u_2;$$
$$-f'\alpha_{30} = f'u_2;$$

die Lösungen hievon lauten: $\alpha_1 = (c'+d'+f')\cdot\alpha_{30}$; $\alpha_2 = (b'-c'-d'-1)\cdot\alpha_{30}$; $\alpha_3 = -(b'+f')\cdot\alpha_{30}$; $\alpha_4 = -c'\cdot\alpha_{30}$; $\alpha_5 = (c'+1)\cdot\alpha_{30}$; $\alpha_6 = 0$; $\alpha_{22} = -\alpha_{30}$; $\alpha_{23} = \alpha_{30}$; $\alpha_{28} = 0$; $\alpha_{29} = -\alpha_{30}$. —

Endlich muss auch noch der Faktor von C_3C_3' identisch sein mit $-(u_1x_1+u_2x_2)C_3$. Daher durch Koffizientenvergleichung:

$$\alpha_9+\alpha_{13} = 0;$$
$$\alpha_{13} = 0;$$
$$\alpha_7+\alpha_8+\alpha_{11}-g\alpha_{22}-g\alpha_{23} = -\alpha_{30};$$
$$-\alpha_7-2\alpha_9-2\alpha_{11}-\alpha_{13}+g\alpha_{22}-f\alpha_{30} = -a\alpha_{30};$$
$$\alpha_{11}+\alpha_{13}+f\alpha_{30} = -b\alpha_{30};$$
$$\alpha_{16}+\alpha_{17} = \alpha_{30};$$
$$-\alpha_7-2\alpha_8-2\alpha_{16}-\alpha_{17}+g\alpha_{23}+f\alpha_{30} = -c\alpha_{30}+a\alpha_{30};$$
$$\alpha_7+\alpha_9+\alpha_{16} = d\alpha_{30}+b\alpha_{30};$$
$$\alpha_8+\alpha_{17}-f\alpha_{30} = d\alpha_{30};$$
$$-\alpha_{17} = c\cdot\alpha_{30};$$

Lösungen hiezu: $\alpha_9 = \alpha_{13} = 0$; $\alpha_7 = (b-c-d-1)\cdot\alpha_{30}$; $\alpha_{17} = -c\cdot\alpha_{30}$; $\alpha_8 = (c+d+f)\cdot\alpha_{30}$; $\alpha_{11} = -(b+f)\cdot\alpha_{30}$; $\alpha_{16} = (c+1)\alpha_{30}$.

Man hat daher die fünfte quadratische Relation gefunden:
$(c'+d'+f')\ \varphi_1^2+(b'-c'-d'-1)\ \varphi_1\varphi_2-(b'+f')\cdot\varphi_2^2-c'\cdot\varphi_1\varphi_3$
$+(c'+1)\cdot\varphi_2\varphi_3+(b-c-d-1)\cdot\varphi_1\varphi_4+(c+d+f)\cdot\varphi_2\varphi_4$
$-(b+f)\cdot\varphi_1\varphi_5+(c+1)\ \varphi_1\varphi_6-c\cdot\varphi_2\varphi_6-(\varphi_1-\varphi_2)(\varphi_7+\varphi_8)=0.$ —

31) $\varphi_3\varphi_8 \equiv x_1(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)(f'C_3^2-fC_3C_3')$
$-(x_1^3x_2-2x_1^2x_2x_3+x_1x_2x_3^2-x_1^3x_3+2x_1^2x_3^2-x_1x_3^3)$
$.(f'C_3^2-fC_3C_3')$. —

Untersuchung bezüglich einer Relation:

$\{K_4+g'\alpha_{22}(x_1^2x_2^2-x_1^2x_2x_3)+g'\alpha_{23}(x_1^2x_2^2-x_1x_2^2x_3)+g'^2\alpha_{28}\cdot x_1^2x_2^2$
$+f'\alpha_{29}.(x_1^2x_2^2-2x_1^2x_2x_3+x_1^2x_3^2-x_1x_2^2x_3+2x_1x_2x_3^2-x_1x_3^3)$
$+f'\alpha_{31}.(x_1^3x_2-2x_1^2x_2x_3+x_1x_2x_3^2-x_1^3x_3+2x_1^2x_3^2-x_1x_3^3)\}.C_3^2$
$+\{K_4'-g\alpha_{22}(x_1^2x_2^2-x_1^2x_2x_3)-g\alpha_{23}(x_1^2x_2^2-x_1x_2^2x_3)+g'\alpha_{25}(x_1^2x_2^2$
$-x_1x_2^2x_3)+g'\alpha_{26}(x_1^2x_2^2-x_1^2x_2x_3)-2gg'\alpha_{28}x_1^2x_2^2-f\alpha_{29}(x_1^2x_2^2$
$-2x_1^2x_2x_3+x_1^2x_3^2-x_1x_2^2x_3+2x_1x_2x_3^2-x_1x_3^3)-f\alpha_{31}.(x_1^3x_2$
$-2x_1^2x_2x_3+x_1x_2x_3^2-x_1^3x_3+2x_1^2x_3^2-x_1x_3^3)\}.C_3C_3'$
$+\{K_4''-g\alpha_{25}(x_1^2x_2^2-x_1^2x_2x_3)-g\alpha_{26}(x_1^2x_2^2-x_1^2x_2x_3)+g^2\alpha_{28}x_1^2x_2^2\}$
$.C_3'^2=0.$

Der Faktor von $C_3'^2$ muss wieder identisch verschwinden und somit $\alpha_{10}=\alpha_{14}=\alpha_{15}=\alpha_{19}=\alpha_{20}=\alpha_{21}=\alpha_{25}=\alpha_{26}=\alpha_{28}=0$.

Der Faktor von C_3^2 ist hier identisch mit $C_3'\cdot mx_1$, folglich:

$$\begin{aligned}
\alpha_6&=0;\\
\alpha_4+\alpha_5+f'\alpha_{31}&=m;\\
-\alpha_4-f'\alpha_{31}&=c'm;\\
\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+g'\alpha_{22}+g'\alpha_{23}+f'\alpha_{29}&=0;\\
-2\alpha_1-\alpha_2-\alpha_4-2\alpha_5-g'\alpha_{22}-2f'\alpha_{29}-2f'\alpha_{31}&=a'm;\\
\alpha_1+\alpha_4+f'\alpha_{29}+2f'\alpha_{31}&=d'm;\\
-\alpha_2-2\alpha_3-g'\alpha_{23}-f'\alpha_{29}&=0;\\
\alpha_2+\alpha_5+2f'\alpha_{29}+f'\alpha_{31}&=b'm;\\
-f'\alpha_{29}-f'\alpha_{31}&=f'm;\\
\alpha_3&=0;
\end{aligned}$$

Lösungen sind: $m=0$; $\alpha_1=\alpha_3=\alpha_5=\alpha_6=\alpha_{22}=\alpha_{23}=0$; $\alpha_2=-\alpha_4=f'.\alpha_{31}$. –

Da hier sowohl der Faktor von $C_3'^2$ als auch der von C_3^2 identisch verschwindet, so muss dasselbe geschehen auch mit dem Faktor von C_3C_3', woraus Folgendes resultiert:

$$\begin{aligned}
\alpha_9+\alpha_{13}-f\alpha_{31}&=0;\\
-\alpha_{13}+f\alpha_{31}&=0;\\
\alpha_7+\alpha_8+\alpha_{11}+f\alpha_{31}&=0;\\
-\alpha_7-2\alpha_9-2\alpha_{11}-\alpha_{13}&=0;\\
\alpha_{11}+\alpha_{13}-f\alpha_{31}&=0;\\
\alpha_{16}+\alpha_{17}&=0;
\end{aligned}$$

$$-\alpha_7-2\alpha_8-2\alpha_{16}-\alpha_{17}-f\alpha_{31}=0;$$
$$\alpha_7+\alpha_9+\alpha_{16}+f\alpha_{31}=0;$$
$$\alpha_8+\alpha_{17}=0;$$
$$\alpha_{17}=0;$$

Lösungen: $\alpha_{13}=-\alpha_7=f.\alpha_{31}$; $\alpha_8=\alpha_9=\alpha_{11}=\alpha_{16}=\alpha_{17}=0$.

Somit ist gefunden die sechste Relation:

$$(f'\varphi_1-f\varphi_5)(\varphi_2-\varphi_3)-\varphi_8(\varphi_1-\varphi_3)=0. -$$

32) $$\varphi_4\varphi_8\equiv x_2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3).(f'C_3C_3'-fC_3'^2)$$
$$-(x_1^2x_2^2-2x_1x_2^2x_3+x_2^2x_3^2\ \ x_1^2x_2x_3+2x_1x_2x_3^2\ \ x_2x_3^3)$$
$$\cdot(f'C_3C_3'-fC_3'^2). -$$

Untersuchung bezüglich einer Relation:

$$\{K_4+g'\alpha_{22}(x_1^2x_2^2\ \ x_1^2x_2x_3)+g'\alpha_{23}(x_1^2x_2^2-x_1x_2^2x_3)+g'^2\alpha_{28}x_1^2x_2^2$$
$$+f'\alpha_{29}.(x_1^2x_2^2-2x_1^2x_2x_3+x_1^2x_3^2-x_1x_2^2x_3+2x_1x_2x_3^2-x_1x_3^3)\}$$
$$.C_3^2$$
$$+\{K_4'-g\alpha_{22}(x_1^2x_2^2-x_1^2x_2x_3)-g\alpha_{23}(x_1^2x_2^2-x_1x_2^2x_3)+g'\alpha_{25}$$
$$\cdot(x_1^2x_2^2-x_1^2x_2x_3)+g'\alpha_{26}.(x_1^2x_2^2-x_1^2x_2x_3)-2gg'\alpha_{28}x_1^2x_2^2-f\alpha_{29}$$
$$.(x_1^2x_2^2-2x_1^2x_2x_3+x_1^2x_3^2-x_1x_2^2x_3+2x_1x_2x_3^2-x_1x_3^3)+f'\alpha_{32}$$
$$.(x_1^2x_2^2-2x_1x_2^2x_3+x_2^2x_3^2-x_1^2x_2x_3+2x_1x_2x_3^2-x_2x_3^3)\}.C_3C_3'$$
$$+\{K_4''-g\alpha_{25}(x_1^2x_2^2-x_1x_2^2x_3)-g\alpha_{26}(x_1^2x_2^2-x_1^2x_2x_3)+g^2\alpha_{28}$$
$$.x_1^2x_2^2-f\alpha_{32}.(x_1^2x_2^2-2x_1x_2^2x_3+x_2^2x_3^2-x_1^2x_2x_3+2x_1x_2x_3^2$$
$$-x_2x_3^3)\}.C_3'^2=0. -$$

Der Faktor von C_3^2 ist identisch mit $C_3'.u_1x_1$; daher die Gleichungen:

$$\alpha_6=0;$$
$$\alpha_4=\alpha_5=u_1;$$
$$-\alpha_4-2\alpha_6=c'u_1;$$
$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+g'\alpha_{22}+g'\alpha_{23}+g'^2\alpha_{28}+f'\alpha_{29}=0;$$
$$-2\alpha_1-\alpha_2-\alpha_4-2\alpha_5-g'\alpha_{22}-2f'\alpha_{29}=a'u_1;$$
$$\alpha_1+\alpha_4+\alpha_6+f'\alpha_{29}=d'u_1;$$
$$-\alpha_2-2\alpha_3-g'\alpha_{23}-f'\alpha_{29}=0;$$
$$\alpha_2+\alpha_5+2f'\alpha_{29}=b'u_1;$$
$$-f'\alpha_{29}=f'u_1;$$
$$\alpha_3=0;$$

Lösungen: $u_1=-\alpha_{29}$; $\alpha_1=-(c'+d'+f').\alpha_{29}$;
$\alpha_2=-(b'-c'+2f'-1).\alpha_{29}$; $\alpha_3=0$; $\alpha_4=c'.\alpha_{29}$;
$\alpha_5=-(c'+1).\alpha_{29}$; $\alpha_6=0$;

$g'\alpha_{22} = (\alpha' + b' + 2c' + 2d' + 2f' + 1).\alpha_{29}$;
$g'\alpha_{23} = (b' - c' + f' - 1).\alpha_{29}$ und $g'\alpha_{28} = -\alpha_{29}$. —

Ferner muss der Faktor von $C_3'^2$ identisch sein mit $C_3.u_2x_2$; dann findet man durch Koeffizientenvergleichung:

$$\alpha_{10} + \alpha_{14} + \alpha_{15} - g\alpha_{25} - g\alpha_{26} - \frac{g^2}{g'}.\alpha_{29} - f\alpha_{32} = 0;$$
$$-\alpha_{14} - 2\alpha_{15} + g\alpha_{26} + f\alpha_{32} = 0;$$
$$\alpha_{15} = 0;$$
$$\alpha_{19} + \alpha_{20} = u_2;$$
$$-2\alpha_{10} - \alpha_{14} - \alpha_{19} - 2\alpha_{20} + g\alpha_{25} + 2f\alpha_{32} = au_2;$$
$$\alpha_{14} + \alpha_{20} - 2f\alpha_{32} = bu_2;$$
$$\alpha_{10} + \alpha_{19} + \alpha_{21} - f\alpha_{32} = du_2;$$
$$-\alpha_{19} - 2\alpha_{21} = cu_2;$$
$$\alpha_{21} = 0;$$
$$f\alpha_{32} = fu_2;$$

Lösungen: $\alpha_{10} = (c + d + f).\alpha_{32}$; $\alpha_{14} = (b - c - 2f - 1).\alpha_{32}$; $\alpha_{15} = 0$; $\alpha_{19} = -c.\alpha_{32}$; $\alpha_{20} = (c+1).\alpha_{32}$; $\alpha_{21} = 0$;
$g\alpha_{25} = (a + b + 2c + 2d + 2f + 1).\alpha_{32}$; $g\alpha_{26} = (b - c + f - 1).\alpha_{32}$ und $\alpha_{29} = -\frac{g'}{g}.\alpha_{32}$. —

Endlich muss noch der Faktor von C_3C_3' identisch sein mit $-(C_3'u_1x_1 + C_3.u_2x_2)$; daher die Relationen:

(1) $\alpha_9 + \alpha_{13} = 0$;
(2) $\alpha_{13} = 0$;
(3) $\alpha_7 + \alpha_8 + \alpha_{11} - g\alpha_{22} - g\alpha_{23} + g'\alpha_{25} + g'\alpha_{26} - 2gg'\alpha_{29} - f\alpha_{29} + f'\alpha_{32} = \alpha_{29} - \alpha_{32}$;
(4) $-\alpha_7 - 2\alpha_9 - 2\alpha_{11} - \alpha_{13} + g\alpha_{22} - g'\alpha_{26} + 2f\alpha_{29} - f'\alpha_{32} = a.\alpha_{29} - c'.\alpha_{32}$;
(5) $\alpha_{11} + \alpha_{13} - f\alpha_{29} = b\alpha_{29}$;
(6) $\alpha_{16} + \alpha_{17} = 0$;
(7) $-\alpha_7 - 2\alpha_8 - 2\alpha_{16} - \alpha_{17} + g\alpha_{23} - g'\alpha_{25} + f\alpha_{29} - 2f'\alpha_{32} = c.\alpha_{29} - a'.\alpha_{32}$;
(8) $\alpha_7 + \alpha_9 + \alpha_{16} - 2f\alpha_{29} + 2f'\alpha_{32} = d\alpha_{29} - d'\alpha_{32}$;
(9) $\alpha_8 + \alpha_{17} + f'\alpha_{32} = -b'.\alpha_{32}$;
(10) $\alpha_{17} = 0$;

aus den Gleichungen bis (10), ausser (3), (4) und (7) bestimmt sich: $\alpha_7 = (d + 2f).\alpha_{29} - (d' + 2f')\alpha_{32}$; $\alpha_8 = -(b' + f').\alpha_{32}$; $\alpha_9 = 0$;

$\alpha_{11} = (b+f)\cdot\alpha_{29}$; $\alpha_{13} = \alpha_{16} = \alpha_{17} = 0$, wodurch dann auch die übrigen 3 Gleichungen befriediget werden.

Man hat also die siebente Relation:

$$(c'+d'+f')g'\cdot\varphi_1^2 + (b'-c'+2f'-1)g'\cdot\varphi_1\varphi_2 - c'g'\cdot\varphi_1\varphi_3 + (c'+1)g'\cdot\varphi_2\varphi_3 - \{(d+2f)g' + (d'+2f')g\}\cdot\varphi_1\varphi_4 - (b'+f')g\cdot\varphi_2\varphi_4 + (c+d+f)g\cdot\varphi_4^2 - (b+f)g'\cdot\varphi_1\varphi_5 + (b-c+2f-1)g\cdot\varphi_1\varphi_5 - cg\ \varphi_1\varphi_6 + (c+1)g\cdot\varphi_5\varphi_6 - (a'+b'+2c'+2d'+2f'+1)\cdot\varphi_1\varphi_7 - (b'-c'+f'-1)\cdot\varphi_2\varphi_7 + (a+b+2c+2d+2f+1)\cdot\varphi_1\varphi_7 + (b-c+f-1)\cdot\varphi_5\varphi_7 + \varphi_7^2 - \varphi_8\cdot(g'\varphi_1 - g\varphi_4) = 0. -$$

33) $\varphi_5\varphi_8 \equiv x_1(x_2-x_3)^2(x_1-x_3)(f'C_3C_3' - fC_3'^2)$

$$\equiv (x_1^2x_2^2 - 2x_1^2x_2x_3 + x_1^2x_3^2 - x_1x_2^2x_3 + 2x_1x_2x_3^2 - x_1x_3^3)(f'C_3C_3' - fC_3'^2). -$$

Untersuchung bezüglich einer Relation:

$$C_3\cdot^2\{K_4 + g'\alpha_{22}(x_1^2x_2^2 - x_1^2x_2x_3) + g'\alpha_{23}(x_1^2x_2^2 - x_1x_2^2x_3) + g'^2\alpha_{28}x_1^2x_2^2 + f'\alpha_{29}\ (x_1^2x_2^2 - 2x_1^2x_2x_3 + x_1^2x_3^2 - x_1x_2^2x_3 + 2x_1x_2x_3^2 - x_1x_3^3)\}$$

$$+\{K_4' - g\alpha_{22}(x_1^2x_2^2 - x_1^2x_2x_3) - g\alpha_{23}(x_1^2x_2^2 - x_1x_2^2x_3) + g'\alpha_{25}(x_1^2x_2^2 - x_1x_2^2x_3) + g'\alpha_{26}(x_1^2x_2^2 - x_1^2x_2x_3) - 2gg'\alpha_{28}x_1^2x_2^2 - (f\alpha_{29} - f\alpha_{33})(x_1^2x_2^2 - 2x_1^2x_2x_3 + x_1^2x_3^2 - x_1x_2^2x_3 + 2x_1x_2x_3^2 - x_1x_3^3)\}\cdot C_3C_3'$$

$$+\{K_4'' - g\alpha_{25}(x_1^2x_2^2 - x_1x_2^2x_3) - g\alpha_{26}(x_1^2x_2^2 - x_1^2x_2x_3) + g^2\alpha_{28}x_1^2x_2^2 - f\alpha_{33}\cdot(x_1^2x_2^2 - 2x_2^2x_2x_3 + x_1^2x_3^2 - x_1x_2^2x_3 + 2x_1x_2x_3^2 - x_1x_3^3)\}\cdot C_3'^2 = 0$$

Der Faktor von C_3^2 muss identisch sein mit $C_3'\cdot u_1x_1$ und man hat daher — ähnlich wie bei No. 32 —

$u_1 = -\alpha_{29}$; $\alpha_1 = -(c'+d'+f')\cdot\alpha_{29}$; $\alpha_2 = -(b'-c'+2f'-1)\cdot\alpha_{29}$;
$\alpha_3 = 0$; $\alpha_4 = c'\cdot\alpha_{29}$; $\alpha_5 = -(c'+1)\cdot\alpha_{29}$; $\alpha_6 = 0$;
$g'\alpha_{22} = (a'+b'+2c'+2d'+2f'+1)\cdot\alpha_{29}$;

$g'\alpha_{23} = (b'-c'+f'-1)\cdot\alpha_{29}$ und $\alpha_{28} = -\frac{1}{g'}\ \alpha_{29}$. —

Der Faktor von $C_3'^2$ muss identisch sein mit $C_3u_2x_1$.

Durch Koeffizientenvergleichung findet man:

$$\alpha_{10} + \alpha_{14} + \alpha_{15} - g\alpha_{25} - g\alpha_{26} + g^2\alpha_{28} - f\alpha_{33} = u_2;$$
$$-\alpha_{14} - 2\alpha_{15} + g\alpha_{26} + 2f\alpha_{33} = au_2;$$
$$\alpha_{15} - f\alpha_{33} = bu_2;$$
$$\alpha_{19} + \alpha_{20} = 0;$$

$$-2\alpha_{10}-\alpha_{14}-\alpha_{19}-2\alpha_{20}+g\alpha_{25}+f\alpha_{33}=cu_2;$$
$$\alpha_{14}+\alpha_{20}-2f\alpha_{33}=du_2;$$
$$f\alpha_{33}=fu_2;$$
$$\alpha_{10}+\alpha_{19}+\alpha_{21}=0;$$
$$-\alpha_{19}-2\alpha_{21}=0;$$
$$\alpha_{21}=0;$$

Lösungen: $u_2=\alpha_{33}$; $\alpha_{10}=\alpha_{19}=\alpha_{20}=\alpha_{21}=0$; $\alpha_{14}=(d+2f):\alpha_{33}$; $\alpha_{15}=(b+f).\alpha_{33}$; $g\alpha_{25}=(c+d+f).\alpha_{33}$; $g\alpha_{26}=(a+2b+d+2f).\alpha_{33}$ und $g\alpha_{28}=\alpha_{33}$.

Endlich muss der Faktor von C_3C_3' identisch sein mit $-(C_3u_1x_1+C_3'u_2x_1)$; man erhält folgende zehn Gleichungen;

(1) $$\alpha_9+\alpha_{13}=-\alpha_{33};$$

(2) $$-\alpha_{13}=-c'\alpha_{33};$$

(3) $$\alpha_7+\alpha_8+\alpha_{11}-g\alpha_{22}-g\alpha_{23}+g'\alpha_{25}+g'\alpha_{26}-2gg'\alpha_{28}-f\alpha_{29}+f'\alpha_{33}=\alpha_{29}$$

(4) $$-\alpha_7-2\alpha_9-2\alpha_{11}-\alpha_{13}+g\alpha_{22}-g'\alpha_{26}+2f\alpha_{29}-2f'\alpha_{33}=a\alpha_{29}-a'\alpha_{33}\ldots$$

(5) $$\alpha_{11}+\alpha_{13}-f\alpha_{29}+f'\alpha_{33}=b\alpha_{29}-d'\alpha_{33};$$

(6) $$\alpha_{16}+\alpha_{17}=0;$$

(7) $$-\alpha_7-2\alpha_8-2\alpha_{16}-\alpha_{17}+g\alpha_{23}-g'\alpha_{25}+f\alpha_{29}-f'\alpha_{33}=c.\alpha_{29};$$

(8) $$\alpha_7+\alpha_9+\alpha_{16}-2f\alpha_{29}+2f'\alpha_{33}=d\alpha_{29}-b'\alpha_{33};$$

(9) $$\alpha_8+\alpha_{17}=0;$$

(10) $$\alpha_{17}=0$$

und aus denselben mit Hinweglassung etwa der 3ten, 4ten und 7ten

$\alpha_7=(d+f).\alpha_{29}-(b'-c'+2f'-1).\alpha_{33}$; $\alpha_8=0$; $\alpha_9=-(c'+1).\alpha_{33}$; $\alpha_{11}=(b+f).\alpha_{29}-(c'+d'+f').\alpha_{33}$; $\alpha_{13}=c'.\alpha_{33}$; $\alpha_{16}=\alpha_{17}=0$, welche Werte auch die übrigen 3 Gleichungen befriedigen.

Somit ist die achte quadratische Relation gefunden:

$$(c'+d'+f')g'.\varphi_1^2+(b'-c'+2f'-1)g'.\varphi_1\varphi_2-c'g'.\varphi_1\varphi_3+(c'+1)g'.\varphi_2\varphi_3-\left|(b'-c'+2f'-1)g+(d+2f)g'\right|.\varphi_1\varphi_4-(c'+1)g.\varphi_3\varphi_4-\left|(c'+d'+f')g+(b+f)g'\right|.\varphi_1\varphi_5+c'g.\varphi_3\varphi_5+(d+2f)g.\varphi_4\varphi_5+(b+f)g.\varphi_5^2-(a'+b'+2c'+2d'+2f'+1).\varphi_1\varphi_7-(b'-c'+f'-1).\varphi_2\varphi_7+(c+d+f).\varphi_4\varphi_7+(a+2b+d+2f).\varphi_5\varphi_7+\varphi_7^2-\varphi_8(g'\varphi_1-g\varphi_5)=0.$$ —

34) $\varphi_6\varphi_8 \equiv x_2(x_2-x_3)^2(x_1-x_3)(f'C_3C_3'-fC_3'^2)$ ·
$-(x_1x_2^3\ 2x_1x_2^2x_3+x_1x_2x_3^2-x_2^3x_3+2x_2^2x_3^2-x_2x_3^3)$
$.(f'C_3C_3'-fC_3'^2).$ —

Untersuchung bezüglich einer Relation:

$\{K_4+g'\alpha_{22}(x_1^2x_2^2-x_1^2x_2x_3)+g'\alpha_{23}(x_1^2x_2^2-x_1x_2^2x_3)$
$+g'^2\alpha_{28}x_1^2x_2^2+f'\alpha_{29}.(x_1^2x_2^2-2x_1^2x_2x_3+x_1^2x_3^2-x_1x_2^2x_3$
$+2x_1x_2x_3^2-x_1x_3^3)\}.C_3^2$
$+\{K_4'-g\alpha_{22}(x_1^2x_2^2-x_1^2x_2x_3)-g\alpha_{23}(x_1^2x_2^2-x_1x_2^2x_3)$
$+g'\alpha_{25}(x_1^2x_2^2-x_1x_2^2x_3)+g'\alpha_{26}(x_1^2x_2^2-x_1^2x_2x_3)-2gg'\alpha_{28}$
$.x_1^2x_2^2-f\alpha_{29}(x_1^2x_2^2-2x_1^2x_2x_3+x_1^2x_3^2-x_1x_2^2x_3+2x_1x_2x_3^2$
$-x_1x_3^3)+f'\alpha_{34}(x_1x_2^3-2x_1x_2^2x_3+x_1x_2x_3^2-x_2^3x_3+2x_2^2x_3^2$
$-x_2x_3^3)\}.C_3C_3'$
$+\{K_4''-g\alpha_{25}(x_1^2x_2^2-x_1x_2^2x_3)-g\alpha_{26}(x_1^2x_2^2-x_1^2x_2x_3)$
$+g^2\alpha_{28}x_1^2x_2^2-f\alpha_{34}.(x_1x_2^3-2x_1x_2^2x_3+x_1x_2x_3^2-x_2^3x_3+2x_2^2x_3^2$
$-x_2x_3^3)\}=0.$ —

Der Faktor von C_3^2 ist identisch mit $C_3'u_1x_1$, also
$u_1=-\alpha_{29}$; $\alpha_1=-(c'+d'+f').\alpha_{29}$; $\alpha_2=-(b'-c'+2f'-1)\alpha_{29}$;
$\alpha_3=0$; $\alpha_4=c'.\alpha_{29}$; $\alpha_5=-(c'+1).\alpha_{29}$; $\alpha_6=0$;
$g'\alpha_{22}=(\alpha'+b'+2c'+2d'+2f'+1).\alpha_{29}$;
$g'\alpha_{23}=(b'-c'+f'-1).\alpha_{29}$ und $\alpha_{28}=-\frac{1}{g'}.\alpha_{29}.$ —

Der Faktor von $C_3'^2$ muss identisch sein mit $C_3.u_2x_2$, daher folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\alpha_{10}+\alpha_{14}+\alpha_{15}-g\alpha_{25}-g\alpha_{26}+g^2\alpha_{28}&=0;\\
-\alpha_{14}-2\alpha_{15}+g\alpha_{26}&=0;\\
\alpha_{15}&=0;\\
\alpha_{19}+\alpha_{20}-f\alpha_{34}&=u_2;\\
-2\alpha_{10}-\alpha_{14}-\alpha_{19}-2\alpha_{20}+g\alpha_{25}+2f\alpha_{34}&=au_2;\\
\alpha_{14}+\alpha_{20}-f\alpha_{34}&=bu_2;\\
\alpha_{10}+\alpha_{19}+\alpha_{21}-2f\alpha_{34}&=du_2;\\
-\alpha_{19}-2\alpha_{21}+f\alpha_{34}&=cu_2;\\
f\alpha_{34}&=fu_2;\\
\alpha_{21}&=0;
\end{aligned}$$

Lösungen: $u_2=\alpha_{34}$; $\alpha_{10}=(c+d+f).\alpha_{34}$;
$\alpha_{14}=(b-c+f-1).\alpha_{34}$; $\alpha_{15}=0$; $\alpha_{19}=(f-c).\alpha_{34}$;
$\alpha_{20}=(c+1).\alpha_{34}$; $\alpha_{21}=0$; $g\alpha_{25}=(a+b+2c+2d+2f+1).\alpha_{34}$;

$g\alpha_{26} = (b-c+f-1).\alpha_{34}$ und $\alpha_{28} = \frac{f}{g}.\alpha_{34}$.

Der Koeffizient von C_3C_3' muss hier identisch sein mit $-(C_3u_1x_1+C_3'u_2x_2)$, woraus

$$\alpha_9+\alpha_{13}=0;$$
$$\alpha_{13}=0;$$
$$\alpha_7+\alpha_8+\alpha_{11}-g\alpha_{22}-g\alpha_{23}+g'\alpha_{25}+g'\alpha_{26}-2gg'\alpha_{28}-f\alpha_{29} = \alpha_{29}-\alpha_{34};$$
$$-\alpha_7-2\alpha_9-2\alpha_{11}-\alpha_{13}+g\alpha_{22}-g'\alpha_{26}+2f\alpha_{29} = a.\alpha_{29}-c'.\alpha_{34};$$
$$\alpha_{11}+\alpha_{13}-f\alpha_{29} = b.\alpha_{29};$$
$$\alpha_{16}+\alpha_{17}+f'\alpha_{34}=0;$$
$$-\alpha_7-2\alpha_8-2\alpha_{16}-\alpha_{17}+g\alpha_{23}-g'\alpha_{25}+f\alpha_{29}-2f'\alpha_{34} = c\alpha_{29}-a'\alpha_{34};$$
$$\alpha_7+\alpha_9+\alpha_{16}-2f\alpha_{29}+f'\alpha_{34} = d\alpha_{29}-d'\alpha_{34};$$
$$\alpha_8+\alpha_{17}+2f'\alpha_{34} = -b'\alpha_{34};$$
$$-\alpha_{17}-f'\alpha_{34}=0 \text{ und hieraus}$$

$\alpha_7 = (d+2f)\ \alpha_{29}-(d'+f').\alpha_{34}$; $\alpha_8 = -(b'+f').\alpha_{34}$; $\alpha_9=0$;
$\alpha_{11}=(b+f).\alpha_{29}$; $\alpha_{13}=0$; $\alpha_{16}=0$; $\alpha_{17}=-f'\alpha_{34}$.

Man hat nun folgende neunte Relation:

$(c'+d'+f')g'.\varphi_1^2+(b'-c'+2f'-1)g'.\varphi_1\varphi_2-c'g'.\varphi_1\varphi_3+(c'+1)g'.\varphi_2\varphi_3-\{(d+2f)g'+(d'+f')g\}.\varphi_1\varphi_4-(b'+f')g.\varphi_2\varphi_4$
$+(c+d+f)g.\varphi_4^2-(b+f)g'.\varphi_1\varphi_5+(b-c+f-1)g.\varphi_4\varphi_5-f'g.\varphi_2\varphi_6$
$-(c-f)g.\varphi_4\varphi_6+(c+1)g.\varphi_5\varphi_6-(a'+b'+2c'+2d'+2f'+1).\varphi_1\varphi_7-(b'-c'+f'-1).\varphi_2\varphi_7+(a+b+2c+2d+2f+1).\varphi_4\varphi_7$
$+(b-c+f-1).\varphi_5\varphi_7+\varphi_7^2-\varphi_8.(g'\varphi_1-g\varphi_6)=0.$ —

35) $\varphi_7\varphi_8 = x_1x_2(x_1-x_3)(x_2-x_3)(g'C_3-gC_3')(f'C_3-fC_3')$
$=(x_1^2x_2^2-x_1^2x_2x_3-x_1x_2^2x_3+x_1x_2x_3^2)\{f'g'C_3^2-(fg'+f'g)C_3C_3'+fgC_3'^2\}.$ —

Auf demselben Wege wie bei den vorhergehenden Untersuchungen berechnet man auch die direkt ersichtliche zehnte Relation: $\varphi_7\varphi_8 \equiv (f'\varphi_1-f\varphi_5)(g'\varphi_2-g\varphi_4)$. —

36) $\varphi_8^2 \equiv (x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2(f'C_3-fC_3')^2$
$=(x_1^2x_2^2-2x_1^2x_2x_3+x_1^2x_3^2-2x_1x_2^2x_3+4x_1x_2x_3^2-2x_1x_3^3+x_2^2x_3^2-2x_2x_3^3+x_3^4).(f'^2C_3^2-2ff'.C_3C_3'+f^2C_3'^2).$ —

Untersuchung bezüglich einer Relation:

$\{K_4+g'\alpha_{22}(x_1^2x_2^2-x_1^2x_2x_3)+g'\alpha_{23}(x_1^2x_2^2-x_1x_2^2x_3)$
$+g'^2\alpha_{28}x_1^2x_2^2+f'\alpha_{29}(x_1^2x_2^2-2x_1^2x_2x_3+x_1^2x_3^2-x_1x_2^2x_3$

$$+2x_1x_2x_3^2 - x_1x_3^3) + f'^2 \cdot \alpha_{36} \cdot (x_1^2x_2^2 - 2x_1^2x_2x_3 + x_1^2x_3^2$$
$$-2x_1x_2^2x_3 + 4x_1x_2x_3^2 - 2x_1x_3^3 + x_2^2x_3^2 - 2x_2x_3^3 + x_3^4)\Big\} \cdot C_3^2$$
$$+\Big\{K_4' - g\alpha_{22}(x_1^2x_2^2 - x_1^2x_2x_3) - g\alpha_{23}(x_1^2x_2^2 - x_1x_2^2x_3)$$
$$+g'\alpha_{25}(x_1^2x_2^2 - x_1x_2^2x_3) + g'\alpha_{26}(x_1^2x_2^2 - x_1^2x_2x_3) - 2gg'\alpha_{28}x_1^2x_2^2$$
$$-f\alpha_{29} \cdot (x_1^2x_2^2 - 2x_1^2x_2x_3 + x_1^2x_3^2 - x_1x_2^2x_3 + 2x_1x_2x_3^2 - x_1x_3^3)$$
$$-2ff'\alpha_{36}(x_1^2x_2^2 - 2x_1^2x_2x_3 + x_1^2x_3^2 - 2x_1x_2^2x_3 + 4x_1x_2x_3^2$$
$$-2x_1x_3^3 + x_2^2x_3^2 - 2x_2x_3^3 + x_3^4)\Big\} \cdot C_3C_3'$$
$$+\Big\{K_4'' - g\alpha_{25}(x_1^2x_2^2 - x_1x_2^2x_3) - g\alpha_{26}(x_1^2x_2^2 - x_1^2x_2x_3)$$
$$+g^2\alpha_{28}x_1^2x_2^2 + f^2\alpha_{36} \cdot (x_1^2x_2^2 - 2x_1^2x_2x_3 + x_1^2x_3^2 - 2x_1x_2^2x_3$$
$$+4x_1x_2x_3^2 - 2x_1x_3^3 + x_2^2x_3^2 - 2x_2x_3^3 + x_3^4)\Big\} \cdot C_3'^2 = 0. —$$

a) Der Faktor von C_3^2 muss identisch sein mit $C_3'(u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3)$.

Die Vergleichung der Koeffizienten gibt folgende Gleichungen:

$$\alpha_6 = 0;$$
$$\alpha_4 + \alpha_5 = u_1;$$
$$-\alpha_1 - 2\alpha_6 = c'u_1;$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + g'\alpha_{22} + g'\alpha_{23} + f'\alpha_{29} + g'^2\alpha_{28} + f'^2\alpha_{36} = u_2;$$
$$-2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_4 - 2\alpha_5 - g'\alpha_{22} - 2f'\alpha_{29} - 2f'^2\alpha_{36} = a'u_1 + c'u_2 + u_3;$$
$$\alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_6 + f'\alpha_{29} + f'^2 \cdot \alpha_{36} = d'u_1 + c'u_3;$$
$$-\alpha_2 - 2\alpha_3 - g'\alpha_{23} - f'\alpha_{29} - 2f'^2\alpha_{36} = a'u_2;$$
$$\alpha_2 + \alpha_5 + 2f'\alpha_{29} + 4f'^2 \cdot \alpha_{36} = b'u_1 + d'u_2 + a'u_3;$$
$$-f'\alpha_{29} - 2f'^2\alpha_{36} = f'u_1 + d'u_3;$$
$$\alpha_3 + f'^2 \cdot \alpha_{36} = b'u_2;$$
$$-2f'^2\alpha_{36} = b'u_3 + f'u_2;$$
$$f'^2\alpha_{36} = f'u_3.$$

Auflösungen; $u_3 = f'\alpha_{36}$; $\alpha_6 = 0$;

$u_2 = -(b' + 2f') \cdot \alpha_{36}$; $u_1 = -\alpha_{29} - (d' + 2f') \cdot \alpha_{36}$;

$\alpha_3 = -(b' + f')^2 \cdot \alpha_{36}$;

$\alpha_4 = c' \cdot \alpha_{29} + c'(d' + 2f')\alpha_{36}$;

$\alpha_5 = -(c' + 1) \cdot \alpha_{29} - (c' + 1)(d' + 2f') \cdot \alpha_{36}$;

$\alpha_2 = (-b' + c' - 2f' + 1) \cdot \alpha_{29} + \Big\{(-b' + c' - 2f' + 1)(d' + 2f') + a'f' - b'd'\Big\} \cdot \alpha_{36}$;

$\alpha_1 = -(c' + d' + f') \cdot \alpha_{29} - (c' + d' + f')(d' + f') \cdot \alpha_{36}$;

$g'\alpha_{22} = (a' + b' + 2c' + 2d' + 2f' + 1) \cdot \alpha_{29} + \Big\{(a' + b' + 2c' + 2d' + 2f' + 1)(d' + 2f') - f'(a' + 1) + b'(c' + d')\Big\} \cdot \alpha_{36}$

$g'\alpha_{23} = (b' - c' + f' - 1) \cdot \alpha_{29} + \Big\{(b' - c' + f' - 1)(d' + 2f') + (b' + f')(a' + 2b' + d' + 2f')\Big\} \cdot \alpha_{36}$;

$g' . \alpha_{28} = -\alpha_{29} - (b' + d' + 3f') . \alpha_{36}$. —

b) Der Faktor von $C_3'^2$ muss hier identisch sein mit $C_3 . (v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3)$, woraus:

$$\begin{aligned}
\alpha_{10} + \alpha_{14} + \alpha_{15} - g\alpha_{25} - g\alpha_{26} + g^2\alpha_{28} + f^2\alpha_{36} &= v_1;\\
-\alpha_{14} - 2\alpha_{15} + g\alpha_{26} - 2f^2\alpha_{36} &= av_1;\\
\alpha_{15} + f^2\alpha_{36} &= bv_1;\\
\alpha_{19} + \alpha_{20} &= v_2;\\
\alpha_{21} &= 0;\\
2\alpha_{10} - \alpha_{14} - \alpha_{19} - 2\alpha_{20} + g\alpha_{25} - 2f^2\alpha_{36} &= av_2 + v_3 + cv_1;\\
\alpha_{14} + \alpha_{20} + 4f^2\alpha_{36} &= dv_1 + bv_2 + av_3;\\
-2f^2\alpha_{36} &= fv_1 + bv_3;\\
\alpha_{10} + \alpha_{19} + \alpha_{21} + f^2\alpha_{36} &= dv_2 + cv_3;\\
-\alpha_{19} - 2\alpha_{21} &= cv_2;\\
-2f^2\alpha_{36} &= fv_2 + dv_3;\\
f^2\alpha_{36} &= fv_3;
\end{aligned}$$

Lösungen: $v_3 = f . \alpha_{36}$; $v_2 = -(d + 2f) . \alpha_{36}$;

$v_1 = -(b + 2f) . \alpha_{36}$; $\alpha_{21} = 0$; $\alpha_{19} = c(d + 2f) . \alpha_{36}$;

$\alpha_{10} = -(d + f)(c + d + f) . \alpha_{36}$; $\alpha_{20} = -(c + 1)(d + 2f) . \alpha_{36}$;

$\alpha_{15} = -(b + f)^2 . \alpha_{36}$;

$\alpha_{14} = \{(-b + c + 1)(d + 2f) - d(b + 2f) + f(a - 4f)\} . \alpha_{36}$;

$g\alpha_{25} = \{-(a + b + 1)(d + 2f) - (c + d)(b + 2f) + f(a - 2f + 1) - 2(d + f)(c + d + f)\} . \alpha_{36}$;

$g\alpha_{26} = \{-(b - c - 1)(d + 2f) - 2(b + f)^2 - (a + d)(b + 2f) + f(a - 2f)\} . \alpha_{36}$;

$g\alpha_{28} = -(b + d + 3f)\ \alpha_{36}$

c) Endlich muss jetzt der Faktor von $C_3 C_3'$ identisch sein mit $-C_3(u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3) - C_3'(v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3)$, woraus

$$\begin{aligned}
&(1) && \alpha_9 + \alpha_{13} = -v_1;\\
&(2) && \alpha_{13} = c' v_1;\\
&(3) && \alpha_7 + \alpha_8 + \alpha_{11} - g\alpha_{22} - g\alpha_{23} + g'\alpha_{25} + g'\alpha_{26} - 2gg'\alpha_{28} - f\alpha_{29}\\
& && \quad -2ff' . \alpha_{36} = -u_1 - v_2;\\
&(4) && -\alpha_7 - 2\alpha_9 - 2\alpha_{11} - \alpha_{13} + g\alpha_{22} - g'\alpha_{26} + 2f\alpha_{29} + 4ff'\alpha_{36}\\
& && \quad = -au_1 - a'v_1 - c'v_2 - v_3;\\
&(5) && \alpha_{11} + \alpha_{13} - f\alpha_{29} - 2ff'\alpha_{36} = -bu_1 - d'v_1 - c'v_3;\\
&(6) && \alpha_{16} + \alpha_{17} = -u_2;\\
&(7) && -\alpha_7 - 2\alpha_8 - 2\alpha_{16} - \alpha_{17} + g\alpha_{23} - g'\alpha_{25} + f\alpha_{29} + 4ff'\alpha_{36}\\
& && \quad = -cu_1 - au_2 - u_3 - a'v_2;
\end{aligned}$$

$$(8)\qquad \alpha_7+\alpha_9+\alpha_{16}-2f\alpha_{29}-8ff'\alpha_{36}=-du_1-bu_2-au_3-b'v_1-d'v_2-a'v_3;$$

$$(9)\qquad f\alpha_{29}+4ff'\alpha_{36}=-fu_1-bu_3-f'v_1-d'v_3;$$

$$(10)\qquad \alpha_8+\alpha_{17}=-du_2-cu_3-b'v_2;$$

$$(11)\qquad \alpha_{17}=cu_2;$$

$$(12)\qquad 4ff'\alpha_{36}=-fu_2-du_3-f'v_2-b'v_3;$$

$$(13)\qquad 2ff'\alpha_{36}=fu_3+f'v_3.$$ —

Die Gleichungen (1), (2), (5), (6), (8), (10) und (11) ergeben die auch die übrigen Gleichungen befriedigenden Lösungen:

$$\alpha_{17}=-c(b'+2f').\alpha_{36};$$

$$\alpha_8=\{(c+d)(b'+2f')+b'(d+2f)+f'(2f-c)\}.\alpha_{36};$$

$$\alpha_{13}=-c'(b+2f).\alpha_{36};$$

$$\alpha_9=(c'+1)(b+2f).\alpha_{36};$$

$$\alpha_{16}=(c+1)(b'+2f').\alpha_{36}$$

$$\alpha_{11}=(b+f).\alpha_{29}+\{(c'+d')(b+2f)+b(d'+2f')+f(2f'-c')\}.\alpha_{36}$$

und $\alpha_7=(d+2f).\alpha_{29}+\{(b'-c'-1)(b+2f)+(b-c-1)(b'+2f')+d(d'+2f')+d'(d+2f)+f'(4f-a)+f(4f'-a')\}.\alpha_{36}.$

Daraus folgt die elfte Relation:

$$(c'+d'+f').\{(b'+2f')g-(b+d+3f)g'\}.\varphi_1^2+\{(b'-c'+2f'-1)(b'+f')g-(b'-c'+2f'-1)(b+d+3f)g'+(a'f'-b'd')g\}.\varphi_1\varphi_2-(b'+f')^2g.\varphi_2^2+c'.\{(b+d+3f)g'-(b'+f')g\}.\varphi_1\varphi_3+(c'+1)\{(b'+f')g-(b+d+3f)g'\}.\varphi_2\varphi_3+[(b+d+3f)(d+2f)g'+\{(b'-c'-1)(b+2f)+(b-c-1)(b'+2f')-(b'+3f')(d+2f)+d(d'+2f')+f'(4f-a)+f(4f'-a')\}g].\varphi_1\varphi_4+(b'+f')(c+2d+2f)g.\varphi_2\varphi_4+(c'+1)(b+2f)g.\varphi_3\varphi_4-(d+f)(c+d+f)g.\varphi_4^2+(b+f)\{(b+d+3f)g'-(b'-c'-d'+f')g\}.\varphi_1\varphi_5-c'(b+2f)g.\varphi_3\varphi_5+\{-(b-c+2f-1)(d+2f)+af-bd\}g.\varphi_4\varphi_5-(b+f)^2g.\varphi_5^2+(c+1)(b'+2f')g.\varphi_1\varphi_6-c(b'+2f')g.\varphi_2\varphi_6+c(d+2f)g.\varphi_4\varphi_6-(c+1)(d+2f)g.\varphi_5\varphi_6+\{(a'+b'+2c'+2d'+2f'+1)(b+d+3f)-(b'+2f')g\}.\varphi_1\varphi_7+\{(b'-c'+f'-1)(b+d+3f)+(b'+f')g\}.\varphi_2\varphi_7-\{(a+b+2c+2d+2f+1)(b+d+f)-(b+2f)g\}.\varphi_4\varphi_7-\{(b-c+f-1)(b+d+3f)+(b+f)g\}.\varphi_5\varphi_7-(b+d+3f).\varphi_7^2+\{(b+d+3f)g'-(b'+d'+3f')g\}.\varphi_1\varphi_8+g\varphi_8^2=0.$$ —

§ 3.

Darstellung der bisher gefundenen 11 Relationen aus fünfen derselben.

Bis hieher sind entwickelt worden elf quadratische Relationen; dieselben sind linear zwar von einander unabhängig; aber überhaupt unabhängig sind sie von einander nicht; vielmehr lassen sich aus fünfen derselben die übrigen sechs ableiten.

Man hatte gefunden:

I) $\ldots \varphi_1\varphi_1 = \varphi_2\varphi_5$;

II) $\ldots \varphi_1\varphi_4 = \varphi_3\varphi_6$;

III) $\ldots (\varphi_1-\varphi_3)(g'\varphi_2-g\varphi_4) = \varphi_7(\varphi_2-\varphi_3)$;

V) $\ldots (c'+d'+f')\cdot\varphi_1^2+(b'\cdot c'-d'-1)\cdot\varphi_1\varphi_2+(b'+f')\cdot\varphi_2^2$
$-c'\cdot\varphi_1\varphi_3+(c'+1)\cdot\varphi_2\varphi_3+(b-c-d-1)\cdot\varphi_1\varphi_4$
$+(c+d+f)\cdot\varphi_2\varphi_4-(b+f)\cdot\varphi_1\varphi_5+(c+1)\cdot\varphi_1\varphi_6-$
$c\cdot\varphi_2\varphi_6-(\varphi_1-\varphi_2)(\varphi_7+\varphi_8) = 0.$

VI) $\ldots (\varphi_5-\varphi_6)(f'\varphi_1-f\varphi_5) = \varphi_8(\varphi_1-\varphi_3).$

Dividiert man nun die dritte Relation durch φ_1 und benützt man die Relationen I und II, so erhält man unmittelbar die früher gefundene Relation IV.

Ich dividiere Relation V durch φ_1, wende Relation I an und erhalte dann als Relation V':

$(c'+d'+f')\cdot\varphi_1\varphi_5+(b'-c'-d'-1)\cdot\varphi_1\varphi_4-(b'+f')\cdot\varphi_2\varphi_4-c'\cdot\varphi_3\varphi_5$
$+(c'+1)\cdot\varphi_3\varphi_4+(b-c-d-1)\cdot\varphi_4\varphi_5+(c+d+f)\cdot\varphi_4^2-(b+f)\cdot\varphi_5^2$
$+(c+1)\cdot\varphi_5\varphi_6-c\cdot\varphi_4\varphi_6+(\varphi_4+\varphi_5)(\varphi_7+\varphi_8) = 0. —$

Ich dividiere Relation VI durch φ_1 und erhalte mit Anwendung von I und II folgende Relation VI':

$$(\varphi_5-\varphi_6)(f'\varphi_2-f\varphi_4)-\varphi_8(\varphi_4-\varphi_6) = 0. —$$

Eliminiert man aus Relation III und Relation VI die Grössen $(\varphi_1-\varphi_3)$ und $(\varphi_2-\varphi_3)$, so erhält man die schon früher gefundene Relation X.

Eliminiert man dagegen aus Relation IV und Relation VI' die Grössen $(\varphi_4-\varphi_6)$ und $(\varphi_5-\varphi_6)$, so kommt die Relation X':

$$\varphi_7\varphi_8 = (f'\varphi_2-f\varphi_4)(g'\varphi_1-g\varphi_5).$$

Ich subtrahiere nun die mit g′ multiplizierte Relation V von der früher gefundenen Relation VII und finde mit Berücksichtigung von X folgende Identität:

$$(g'\varphi_1-g\varphi_5)\cdot\{d'\varphi_2-(b-c'-1)\varphi_1-(c+1)\varphi_6\}$$
$$+(g'\varphi_2-g\varphi_1)\cdot\{(f'\varphi_1-f\varphi_5)+(b'+f')\cdot\varphi_2-(c+d+f)\cdot\varphi_1+c'\varphi_6$$
$$-\varphi_7-\varphi_8\}$$
$$+\varphi_7\cdot\{\varphi_7+\varphi_8-(c'+d'+f')\cdot\varphi_1-(b'-c'+f'-1)\cdot\varphi_2+(c+d+f)\cdot\varphi_1$$
$$+(b-c+f-1\cdot\varphi_5\}=0;$$

aus den Relationen III und IV aber resultiert

$$(g'\varphi_1-g\varphi_5):(g'\varphi_2-g\varphi_1):\varphi_7=\varphi_3(\varphi_6-\varphi_5):\varphi_1(\varphi_2-\varphi_3):\varphi_4(\varphi_1-\varphi_3);$$

benützt man nun diese fortlaufende Proportion zur Umgestaltung der voranstehenden Gleichung und dividiert zum Schluss noch mit $(-\varphi_4)$ durch, so bekommt man die Relation V, womit dargethan ist, dass sich Relation VII ableiten lässt aus Relation V.

Wenn ich nun ferner von der Relation VII die mit g multiplizierte Relation V′ subtrahiere, so erscheint die schon früher gefundene Relation VIII.

Wenn ich dann zur Relation VII die mit g multiplizierte Relation VI′ addiere, so kommt die ebenfalls schon früher gefundene Relation IX.

Wenn man Relation VII mit (b+d+3f), Relation V mit (b′+f′) und Relation V′ mit (b+f) multipliziert, die drei multiplizierten Relationen von Relation XI subtrahiert und Relation X benützt, so erscheint an Stelle der Relation XI die vereinfachtere Relation XI′:

$$(c'+d'+f')f'\cdot\varphi_1^2+(b'-c'+f'-1)f'\cdot\varphi_1\varphi_2-\{(d+f)f'+(d'+f')f\}\cdot\varphi_1\varphi_3$$
$$-(b'+f')f\cdot\varphi_2\varphi_4+(c'+1)f\cdot\varphi_3\varphi_4+(c+d+f)f\cdot\varphi_4^2-(b+f)f'\cdot\varphi_1\varphi_5$$
$$-c'f\cdot\varphi_3\varphi_5+(b-c+f-1)f\cdot\varphi_4\varphi_5+(c+1)f'\cdot\varphi_1\varphi_6-cf'\cdot\varphi_2\varphi_6$$
$$-f'\cdot\varphi_1\varphi_7+f\cdot\varphi_4\varphi_7-(d'+2f')\cdot\varphi_1\varphi_8-(b'+f')\cdot\varphi_2\varphi_8+(d+2f)\cdot\varphi_1\varphi_8$$
$$+(b+f)\cdot\varphi_5\varphi_8+\varphi_7\varphi_8+\varphi_8^2=0.$$

Subtrahiert man die mit f multiplizierte Relation V′ von obiger Relation XI′, so kommt:

$$(f'\varphi_1-f\varphi_5)\{(c'+d'+f')\varphi_1-(d+f)\cdot\varphi_4-(b+f)\cdot\varphi_5+(c+1)\cdot\varphi_6$$
$$-\varphi_7-\varphi_8\}$$
$$+(f'\varphi_2-f\varphi_4)\cdot\{(b'-c'+f'-1)\cdot\varphi_1-c\cdot\varphi_6\}$$

$+\varphi_8 \cdot \{\varphi_7 + \varphi_8 + d\varphi_4 + b\varphi_5 - d'\varphi_1 - b'\varphi_2 - (f'\varphi_1 - f\varphi_5) - (f'\varphi_2 - f\varphi_1)\} = 0;$

wegen Relation VI und Relation VI′ aber gilt:

$(f'\varphi_1 - f\varphi_5) : (f'\varphi_2 - f\varphi_1) : \varphi_8 = \varphi_1(\varphi_1 - \varphi_3) : \varphi_2(\varphi_1 - \varphi_3) : \varphi_1(\varphi_2 - \varphi_3);$

wird nun diese fortlaufende Proportion zur Umformung der voranstehenden Gleichung benützt, so kommt wieder heraus die Relation V; also ist sicher Relation XI′ abzuleiten aus Relation V′.

Hiemit ist nun gezeigt, dass sich aus den Relationen I, II, III, V und VI, freilich nicht linear, ableiten lassen die Relationen IV, VII, VIII, IX, X und XI.

§ 4.

Aufstellung der Grundkurve $f_8 = 0$ und der zwölften Relation.

$\varphi_i \cdot \varphi_k = 0$ repräsentiert eine Kurve 10ter Ordnung, welche die Punkte A und B je wenigstens zu 4fachen und die Punkte C, E, 1, 2, 3, 4 und 5 zu je 2fachen Punkten hat; die Mannigfaltigkeit dieser Kurven f_{10} beträgt $\frac{10}{2} \cdot 13 - 2 \cdot 10 - 7 \cdot 3$ oder 24; es muss daher 25 linear von einander unabhängige Kurven dieser Art geben. Nach dem Vorangehenden muss eine solche f_{10}, welche kurz durch $\Sigma\alpha_j \cdot \varphi_i\varphi_k = 0$ bezeichnet sein soll, auf folgende Art darstellbar sein:

$$\alpha_1 \cdot \varphi_1^2 + \alpha_2 \cdot \varphi_1\varphi_2 + \alpha_3 \cdot \varphi_2^2 + \alpha_4 \cdot \varphi_1\varphi_3 + \alpha_5 \cdot \varphi_2\varphi_3 + \alpha_6 \cdot \varphi_3^2 + \alpha_7 \cdot \varphi_1\varphi_4 + \alpha_8 \cdot \varphi_2\varphi_4 + \alpha_9 \cdot \varphi_3\varphi_4 + \alpha_{10} \cdot \varphi_4^2 + \alpha_{11} \cdot \varphi_1\varphi_5 + \alpha_{13} \cdot \varphi_3\varphi_5 + \alpha_{14} \cdot \varphi_4\varphi_5 + \alpha_{15} \cdot \varphi_5^2 + \alpha_{16} \cdot \varphi_1\varphi_6 + \alpha_{17} \cdot \varphi_2\varphi_6 + \alpha_{19} \cdot \varphi_4\varphi_6 + \alpha_{20} \cdot \varphi_5\varphi_6 + \alpha_{21} \cdot \varphi_6^2 + \alpha_{22} \cdot \varphi_1\varphi_7 + \alpha_{23} \cdot \varphi_2\varphi_7 + \alpha_{25} \cdot \varphi_4\varphi_7 + \alpha_{26} \cdot \varphi_5\varphi_7 + \alpha_{28} \cdot \varphi_7^2 + \alpha_{29} \cdot \varphi_1\varphi_8 = 0$$

oder in der Form:

$$\{\alpha_6 \cdot x_1^4 + (\alpha_1 + \alpha_5) \cdot x_1^3x_2 - (\alpha_1 + 2\alpha_6) \cdot x_1^3x_3 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + g'\alpha_{22} + g'\alpha_{23} + g'^2\alpha_{28} + f'\alpha_{29}) \cdot x_1^2x_2^2 - (2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 + 2\alpha_5 + g'\alpha_{22} + f'\alpha_{29}) \cdot x_1^2x_2x_3 + (\alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_6 + f'\alpha_{29}) \cdot x_1^2x_3^2 - (\alpha_2 + 2\alpha_3 + g'\alpha_{23} + f'\alpha_{29}) \cdot x_1x_2^2x_3 + (\alpha_2 + \alpha_5 + 2f'\alpha_{29}) \cdot x_1x_2x_3^2 + \alpha_3 \cdot x_2^2x_3^2 - f'\alpha_{29} \cdot x_1x_3^3\} \cdot C_3^2$$
$$+ \{(\alpha_9 + \alpha_{13}) \cdot x_1^3x_2 - \alpha_{13} \cdot x_1^3x_3 + (\alpha_7 + \alpha_8 + \alpha_{11} - g\alpha_{22} - g\alpha_{23} + g'\alpha_{25} + g'\alpha_{26} - 2gg'\alpha_{28} - f\alpha_{29}) \cdot x_1^2x_2^2 - (\alpha_7 + 2\alpha_9 + 2\alpha_{11} + \alpha_{13} - g\alpha_{22} + g'\alpha_{26} - 2f\alpha_{29}) \cdot x_1^2x_2x_3 + (\alpha_{11} + \alpha_{13} - f\alpha_{29}) \cdot x_1^2x_3^2 +$$

$$(\alpha_{16}+\alpha_{17}).x_1x_2^3-(\alpha_7+2\alpha_8+2\alpha_{16}+\alpha_{17}-g\alpha_{23}+g'\alpha_{25}-f\alpha_{29})$$
$$.x_1x_2^2x_3+(\alpha_7+\alpha_9+\alpha_{16}-2f\alpha_{29}).x_1x_2x_3^2+(\alpha_8+\alpha_{17}).x_2^2x_3^2$$
$$-\alpha_{17}.x_2^3x_3+f\alpha_{29}.x_1x_3^3\Big\}.C_3C_3'$$
$$+\Big\{(\alpha_{10}+\alpha_{14}+\alpha_{15}-g\alpha_{25}-g\alpha_{26}+g^2\alpha_{28}).x_1^2x_2^2-(\alpha_{14}+2\alpha_{15}-g\alpha_{26})$$
$$.x_1^2x_2x_3+\alpha_{15}.x_1^2x_3^2+(\alpha_{19}+\alpha_{20}).x_1x_2^3-(2\alpha_{10}+\alpha_{14}+\alpha_{19}+2\alpha_{20}$$
$$-g\alpha_{25}).x_1x_2^2x_3+(\alpha_{14}+\alpha_{20}).x_1x_2x_3^2+(\alpha_{10}+\alpha_{19}+\alpha_{21}).x_2^2x_3^2$$
$$-(\alpha_{19}+2\alpha_{21}).x_2^3x_3+\alpha_{21}.x_2^4\Big\}.C_3'^2=0.-$$

Unter den ∞^{24} Kurven f_{10} muss es geben ∞^4 Kurven, von denen jede zerfällt in die diesen Entwicklungen zu Grunde gelegte Kurve f_8 und in einen Kegelschnitt durch die beiden Punkte A ($x_2=0$; $x_3=0$) und B ($x_3=0$; $x_1=0$),

In der Gleichung $\Sigma\alpha_i.\varphi_i\varphi_k=0$ zerlege ich die linke Seite in die Summe zweier Formen, von denen die eine den Faktoren x_1x_2 besitzt, die andere nicht; also

$$x_1x_2.\Big[\Big\{(\alpha_4+\alpha_5)x_1^2+(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+g'\alpha_{22}+g'\alpha_{23}+g'^2\alpha_{28}+f'\alpha_{29})$$
$$.x_1x_2-(2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4+2\alpha_5+g'\alpha_{22}+2f'\alpha_{29}).x_1x_3-(\alpha_2+2\alpha_3$$
$$+g'\alpha_{23}+f'\alpha_{29}).x_2x_3+(\alpha_2+\alpha_5+2f'\alpha_{29}).x_3^2\Big\}.C_3^2$$
$$+\Big\{(\alpha_9+\alpha_{13}).x_1^2+(\alpha_7+\alpha_8+\alpha_{11}-g\alpha_{22}-g\alpha_{23}+g'\alpha_{25}+g'\alpha_{26}$$
$$-2gg'\alpha_{28}-f\alpha_{29}).x_1x_2-(\alpha_7+2\alpha_9+2\alpha_{11}+\alpha_{13}-g\alpha_{22}+g'\alpha_{26}-2f\alpha_{29})$$
$$.x_1x_3+(\alpha_{16}+\alpha_{17}).x_2^2-(\alpha_7+2\alpha_8+2\alpha_{16}+\alpha_{17}-g\alpha_{23}+g'\alpha_{25}-f\alpha_{29})$$
$$.x_2x_3+(\alpha_7+\alpha_9+\alpha_{16}-2f\alpha_{29}).x_3^2\Big\}.C_3C_3'$$
$$+\Big\{(\alpha_{10}+\alpha_{14}+\alpha_{15}-g\alpha_{25}-g\alpha_{26}+g^2\alpha_{28}).x_1x_2-(\alpha_{14}+2\alpha_{15}-g\alpha_{26})$$
$$.x_1x_3-(2\alpha_{10}+\alpha_{14}+\alpha_{19}+2\alpha_{20}-g\alpha_{25}).x_2x_3+(\alpha_{19}+\alpha_{20}).x_2^2$$
$$+(\alpha_{14}+\alpha_{20}).x_3^2\Big\}.C_3'^2$$
$$+\Big\{\alpha_6x_1^3-(\alpha_4+2\alpha_6).x_1^2x_3+(\alpha_1+\alpha_4+\alpha_6+f'\alpha_{29}).x_1x_3^2-f'\alpha_{29}x_3^3\Big\}$$
$$.\Big\{x_2(x_1x_2+ax_1x_3+cx_2x_3+dx_3^2)^2+2(x_1x_2+ax_1x_3+cx_2x_3$$
$$+dx_3^2)(bx_1x_3^2+fx_3^3)\Big\}$$
$$+\alpha_3x_2x_3^2.\Big\{x_1(x_2^2+ax_2x_3+bx_3^2)^2+2(x_2^2+ax_2x_3+bx_3^2)(cx_2^2x_3$$
$$+dx_2x_3^2+fx_3^3)\Big\}$$
$$+\Big\{-\alpha_{13}x_1^2x_3+(\alpha_{11}+\alpha_{13}-f\alpha_{29}).x_1x_3^2+f\alpha_{29}.x_3^3\Big\}.\Big\{(x_1x_2$$
$$+ax_1x_3+cx_2x_3+dx_3^2)C_3'+(bx_1x_3^2+fx_3^3)(x_1^2+a'x_1x_3+bx_3^2)\Big\}$$
$$+\Big\{(\alpha_8+\alpha_{17}).x_2x_3^2-\alpha_{17}.x_2^2x_3\Big\}.\Big\{(x_2^2+ax_2x_3+bx_3^2)C_3'$$
$$+(cx_2^2x_3+dx_2x_3^2+fx_3^3)(x_1x_2+a'x_2x_3+c'x_1x_3+d'x_3^2)\Big\}$$
$$+\alpha_{15}.x_1x_3^2.\Big\{x_2(x_1^2+a'x_1x_3+b'.x_3^2)^2+2(x_1^2+a'x_1x_3$$
$$+b'x_3^2)(c'x_1^2x_3+d'x_1x_3^2+f'x_3^3)\Big\}$$
$$+\Big\{(\alpha_{10}+\alpha_{19}+\alpha_{21}).x_2x_3^2-(\alpha_{19}+2\alpha_{21}).x_2^2x_3+\alpha_{21}.x_2^3\Big\}$$

$$\left\{x_1(x_1x_2+a'x_2x_3+c'x_1x_3+d'x_3^2)^2+2(x_1x_2+a'x_2x_3+c'x_1x_3+d'x_3^2)(b'x_2x_3^2+f'x_3^3)\right\}\Big]$$
$$+\Big[\left\{\alpha_6x_1^4-(\alpha_4+2\alpha_6).x_1^3x_3+(\alpha_1+\alpha_1+\alpha_6+f'\alpha_{29}).x_1x_3^2-f'\alpha_{29}.x_1x_3^3\right\}$$
$$.\left\{bx_1x_3^2+fx_3^3\right\}^2+\alpha_3\ x_2^2x_3^2.\left\{cx_2^2x_3+dx_2x_3^2+fx_3^3\right\}^2$$
$$+\left\{-\alpha_{13}x_1^3x_3+(\alpha_{11}+\alpha_{13}-f\alpha_{29})\ x_1^2x_3^2+f\alpha_{29}\ x_1x_3^3\right\}$$
$$.\left\{bx_1x_3^2+fx_3^3\right\}\left\{c'x_1^2x_3+d'x_1x_3^2+f'x_3^3\right\}$$
$$+\left\{(\alpha_8+\alpha_{17}).x_2^2x_3^2-\alpha_{17}x_2^3x_3\right\}.\left\{cx_2^2x_3+dx_2x_3^2+fx_3^3\right\}$$
$$.\left\{b'x_2x_3^2+f'x_3^3\right\}+\alpha_{15}x_1^2x_3^2.\left\{c'x_1^2x_3+d'x_1x_3^2+f'x_3^3\right\}^2$$
$$+\left\{(\alpha_{10}+\alpha_{19}+\alpha_{21})\ x_2^2x_3^2-(\alpha_{19}+2\alpha_{21}).x_2^3x_3+\alpha_{21}x_2^4\right\}$$
$$.\left\{b'x_2x_3^2+f'x_3^3\right\}^2\Big]=0.\ —$$

Ich möchte nun die hier stehende Kurve 10ter Ordnung zerlegen in eine Kurve 8ter Ordnung und in den Kegelschnitt x_1x_2; zunächst sind vorhanden 25 willkürliche lineare Parameter α_i; gewisse hievon will ich nun so bestimmen, dass der zweite Summand auf der linken Seite der vorstehenden Gleichung identisch verschwindet; deshalb gelten folgende 10 Gleichungen:

1) $b^2\ \alpha_6-bc'.\alpha_{13}+c'^2.\alpha_{15}=0;$
2) $2bf.\alpha_6-b^2.(\alpha_4+2\alpha_6)-(bd'+c'f)\ \alpha_{13}+bc'\ (\alpha_{11}+\alpha_{13}\ f\alpha_{29})+2c'd'.\alpha_{15}=0;$
3) $f^2.\alpha_6-2bf.(\alpha_4+2\alpha_6)+b^2.(\alpha_1+\alpha_1+\alpha_6+f'\alpha_{29})-(bf'+d'f).\alpha_{13}+(bd'+c'f)(\alpha_{11}+\alpha_{13}\ f\alpha_{29})+(2c'f'+d'^2)\ \alpha_{15}+bc'f.\alpha_{29}=0;$
4) $-f^2.(\alpha_4+2\alpha_6)+2bf.(\alpha_1+\alpha_4+\alpha_6+f'\alpha_{29})+(bf'+d'f)(\alpha_{11}+\alpha_{13}-f\alpha_{29})-ff'.\alpha_{13}+2d'f'.\alpha_{15}+(bd'f+c'f^2-b^2f').\alpha_{29}=0;$
5) $f^2.(\alpha_1+\alpha_4+\alpha_6+f'\alpha_{29})+ff'.(\alpha_{11}+\alpha_{13}\ f\alpha_{29})+f'^2.\alpha_{15}+(d'f^2-bff')\ \alpha_{29}=0;$
6) $c^2.\alpha_3-b'c.\alpha_{17}+b'^2.\alpha_{21}=0;$
7) $2cd.\alpha_3+b'c.(\alpha_8+\alpha_{17})-b'^2\ (\alpha_{19}+2\alpha_{21})-(b'd+cf').\alpha_{17}+2b'f'.\alpha_{21}=0;$
8) $(d^2+2cf).\alpha_3+(b'd+cf').(\alpha_8+\alpha_{17})-(b'f+df')\ \alpha_{17}-2b'f'.(\alpha_{19}+2\alpha_{21})+b'^2.(\alpha_{10}+\alpha_{19}+\alpha_{21})+f'^2\ \alpha_{21}=0;$
9) $2df.\alpha_3+(b'f+df')\ (\alpha_8+\alpha_{17})+2b'f'.(\alpha_{10}+\alpha_{19}+\alpha_{21})\ f'^2.(\alpha_{19}+2\alpha_{21})-ff'.\alpha_{17}=0;$
10) $ff'.(\alpha_8+\alpha_{17})+f^2.\alpha_3+f'^2.(\alpha_{10}+\alpha_{19}+\alpha_{21})=0.\ —$

Die Gleichungen 1, 2, 3, 4 und 5 sind linear und homogen und enthalten die Unbekannten α_6, α_{13}, $(\alpha_4+2\alpha_6)$, $(\alpha_{11}+\alpha_{13}-f\alpha_{29})$, $(\alpha_1+\alpha_4+\alpha_6+f'\alpha_{29})$, α_{15} und α_{29}; in diesem System verschwindet nun die Determinante der Koeffizienten der ersten fünf Unbekannten α_6, α_{13}, $(\alpha_4+2\alpha_6)$, $(\alpha_{11}+\alpha_{13}-f\alpha_{29})$ und $(\alpha_1+\alpha_4+\alpha_6+f'\alpha_{29})$; ebenso verschwinden noch fünf andere Determinanten, welche man aus der soeben genannten dadurch erhält, dass man die Glieder jeder Vertikalreihe ersetzt durch die Koeffizienten von α_{29}, während hingegen fünf andere Determinanten nicht verschwinden, welche man aus der ersten Determinante dadurch erhält, dass man die Glieder einer jeden Vertikalreihe durch die Koeffizienten von α_{15} ersetzt; daraus folgt, dass $\alpha_{15}=0$ sein muss; ferners kommt dann

$$\alpha_1 = -(c'+d'+f').\alpha_{29}+\frac{c'+d'+f'}{b}.\alpha_{13};$$

$$\alpha_4 = c'.\alpha_{29}-\frac{2c'+d'}{b}.\alpha_{13};$$

$$\alpha_6 = \frac{c'}{b}\alpha_{13} \text{ und}$$

$$\alpha_{11} = (b+f).\alpha_{29}-\frac{b+f}{b}.\alpha_{13}. -$$

Ähnlich verhält sich die Sache bei den Gleichungen 6, 7, 8, 9 und 10. Man hat fünf lineare Gleichungen homogen in den 6 Unbekannten α_{17}, α_{21}, $(\alpha_8+\alpha_{17})$, $(\alpha_{19}+2\alpha_{21})$, $(\alpha_{10}+\alpha_{19}+\alpha_{21})$ und α_3. Die aus den Koeffizienten der ersten fünf Unbekannten α_{17}, α_{21}, $(\alpha_8+\alpha_{17})$, $(\alpha_{19}+2\alpha_{21})$ und $(\alpha_{10}+\alpha_{19}+\alpha_{21})$ gebildete Determinante verschwindet, während fünf andere Determinanten nicht verschwinden, welche aus der vorigen Determinante dadurch gebildet werden, dass man die Glieder der einzelnen Vertikalreihen durch die Koeffizienten von α_3 ersetzt. Dadurch ergibt sich $\alpha_3=0$ und ferners

$$\alpha_8 = -\frac{b'+f'}{b'}.\alpha_{17}$$

$$\alpha_{10} = \frac{c+d+f}{b'}\alpha_{17};$$

$$\alpha_{19} = -\frac{2c+d}{b'}.\alpha_{17} \text{ und}$$

$$\alpha_{21} = \frac{c}{b'} \cdot \alpha_{17} \cdot -$$

Jetzt ist die Kurve $\Sigma\alpha_j \cdot \varphi_i\varphi_k = 0$ zerlegt in den Kegelschnitt $x_1x_2 = 0$ und in eine Kurve 8ter Ordnung, welche den Punkt A und den Punkt B je zum dreifachen Punkt und die Punkte E, 1, 2, 3, 4 und 5 zu zweifachen Punkten hat. Nun soll aber diese Kurve 8ter Ordnung auch noch den Punkt C zum Doppelpunkt haben. Diese Forderung involviert folgende 3 Bedingungsgleichungen:

$(\alpha_2 + \alpha_5)\ f^2 + (\alpha_7 + \alpha_9 + \alpha_{16}) \cdot ff' + (\alpha_{11} + \alpha_{20}) f'^2 + (b'f^2 - dff') \cdot \alpha_{29}$
$= 0$; dann:

$(\alpha_2 + \alpha_5) \cdot 2bf + (\alpha_7 + \alpha_9 + \alpha_{16}) \cdot (bf' + d'f) + (\alpha_{11} + \alpha_{20}) \cdot 2d'f'$
$- \alpha_5 \cdot f^2 - (\alpha_9 - \alpha_{16}) ff' + \alpha_{20} \cdot f'^2 - (fg' - f'g)(f\alpha_{22} + f'\alpha_{26})$
$+ \frac{ff'(b+d) - f^2(b'+d')}{b} \cdot \alpha_{13}$
$+ \left\{ f^2(a' + b' + c') - ff'(a + d) + 2bb'f - dd'f - bdf' \right\} \cdot \alpha_{29} = 0$

und endlich:

$(\alpha_2 + \alpha_5) \cdot 2df + (\alpha_7 + \alpha_9 + \alpha_{16})(df' + b'f) + (\alpha_{11} + \alpha_{20})\ 2b'f'$
$+ \alpha_5 \cdot f^2 + (\alpha_9 - \alpha_{16}) \cdot ff' - \alpha_{20} \cdot f'^2 - (fg' - f'g)(f\alpha_{23} + f'\alpha_{25})$
$+ \frac{ff'(b'+d') - f'^2(b+d)}{b'} \cdot \alpha_{17}$
$+ \left\{ dff' - b'f^2 - d^2f' - cff' + b'df \right\} \cdot \alpha_{29} = 0.$

Hiemit ist nun die Kurve $\Sigma\alpha_j \cdot \varphi_i\varphi_k = 0$ zerspalten in die Grundkurve f_8 und in den Kegelschnitt x_1x_2; die Grundkurve enthält homogen 22, also nicht homogen 21 lineare Parameter.

Eine zwölfte Relation besteht nun infolge der Gleichung $f_8 = 0$; sie heisst $f_8 \cdot x_1x_2 = 0$ oder

$\Sigma\alpha_j \cdot \varphi_i\varphi_k = 0$, wo 13 dieser Koeffizienten α_j durch die vorhergehenden 13 Bedingungsgleichungen abhängen von den 12 anderen Koeffizienten α_j, welche willkürlich bleiben, und von den 10 Konstanten der beiden Formen C_3 und C_3', welche ebenfalls willkürlich bleiben.

Durch 2 Punkte gehen 4 linear von einander unabhängige Kegelschnitte; also bestehen auf Grund der Gleichung $f_8 = 0$ vier linear von einander unabhängige quadratische Relationen

der φ, nämlich die schon angegebene $f_8 . x_1 x_2 = 0$; dann noch $f_8 . x_1 x_3 = 0$, $f_8\ x_2 x_3 = 0$ und endlich $f_8 . x_3^2 = 0$.

§ 5.

Aufsuchung der Koeffizienten der 13. Relation.

Die 13. quadratische Relation der φ heisst $f_8 . x_1 x_3 = 0$ oder $\frac{1}{x_1 x_2} . \Sigma \alpha_j . \varphi_i \varphi_k . x_1 x_3 = 0$; man kann sie auch schreiben in der Form: $\Sigma \beta_j . \varphi_i \varphi_k = 0$; dann muss die Identität bestehen

$$x_3 . \Sigma \alpha_j . \varphi_i \varphi_k - x_2 . \Sigma \beta_j . \varphi_i \varphi_k = 0.$$

a) Der Koeffizient von C_3^2 muss sein von der Form $(v_1 x_1^2 + v_2 x_2^2 + v_3 x_3^2 + v_4 x_1 x_3 + v_5 x_2 x_3 + v_6 x_1 x_3) . C_3'$, woraus

(1) $\alpha_6 = c' v_1$;

(2) $\alpha_4 + \alpha_5 + \beta_4 + 2\beta_6 = a' v_1 + c' v_4 + v_6$;

(3) $-\alpha_4 - 2\alpha_6 = d' v_1 + c' v_6$;

(4) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + g'\alpha_{22} + g'\alpha_{23} + g'^2\alpha_{28} + f'\alpha_{29} + 2\beta_1 + \beta_2 + \beta_4 + 2\beta_5 + g'\beta_{22} + 2f'\beta_{29} = c' v_2 + a' v_4 + v_5$;

(5) $-2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_4 - 2\alpha_5 - g'\alpha_{22} - 2f'\alpha_{29} - \beta_1 - \beta_4 - \beta_6 - f'\beta_{29} = b' v_1 + v_3 + d' v_4 + c' v_5 + a' v_6$;

(6) $\alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_6 + f'\alpha_{29} = f' v_1 + c' v_3 + d' v_6$;

(7) $-\alpha_2 - 2\alpha_3 - g'\alpha_{23} - f'\alpha_{29} - \beta_2 - \beta_5 - 2f'\beta_{29} = d' v_2 + b' v_4 + a' v_5$;

(8) $\alpha_2 + \alpha_5 + 2f'\alpha_{29} + f'\beta_{29} = a' v_3 + f' v_4 + d' v_5 + b' v_6$

(9) $\alpha_3 = b' v_5 + f' v_2$;

(10) $-\beta_6 = v_1$;

(11) $-\beta_4 - \beta_5 = v_4$;

(12) $-\beta_1 - \beta_2 - \beta_3 - g'\beta_{22} - g'\beta_{23} - f'\beta_{29} - g'^2\beta_{28} = v_2$;

(13) $\beta_2 + 2\beta_3 + g'\beta_{23} + f'\beta_{29} = a' v_2$;

(14) $-\beta_3 = b' v_2$;

(15) $-f' . \alpha_{29} = d' v_3 + f' v_6$;

(16) $0 = f' v_3$;

(17) $0 = b' v_3 + f' v_5$;

hier haben die α_i diejenigen Werte, welche ihnen nach Relation 12 zukommen; aus ihnen werden die vorderhand unbekannten Grössen β_i bestimmt:

$v_1 = \frac{1}{b}\ \alpha_{13}$; $v_2 = 0$; $v_3 = 0$; $v_5 = 0$; $v_6 = -\alpha_{29}$;

$$v_4 = -\frac{1}{b}\cdot\alpha_{13}+g'\alpha_{28}-g'\beta_{28}+\alpha_{29};$$

$$\beta_1 = -\frac{g'}{b}\cdot\alpha_{13}-g'\alpha_{22}-(c'+d'+f')g'\cdot\alpha_{28}+(c'+d'+f')g'\cdot\beta_{28}$$
$$+g'\alpha_{29};$$

$$\beta_2 = \alpha_2+\alpha_5+\frac{f'+g'}{b}\cdot\alpha_{13}-g'\alpha_{23}-(b'-c'+2f'-1)g'\cdot\alpha_{28}$$
$$+(b'-c'+2f'-1)g'\cdot\beta_{28}+(b'+f')\cdot\alpha_{29};$$

$$\beta_3 = 0;$$

$$\beta_4 = -\alpha_5+\frac{a'+c'+d'+2}{b}\cdot\alpha_{13}+c'g'\cdot\alpha_{28}-c'g'\cdot\beta_{28}-\alpha_{29};$$

$$\beta_5 = \alpha_5-\frac{a'+c'+d'+1}{b}\cdot\alpha_{13}-(c'+1)g'\cdot\alpha_{28}+(c'+1)g'\cdot\beta_{28};$$

$$\beta_6 = -\frac{1}{b}\cdot\alpha_{13};$$

$$g'\beta_{22} = \frac{g'}{b}\cdot\alpha_{13}+g'\alpha_{22}+(c'+d'+f')g'\cdot\alpha_{28}-(g'+c'+d'+f')g'\cdot\beta_{28}$$
$$-g'\alpha_{29};$$

$$g'\beta_{23} = -\frac{g'}{b}\cdot\alpha_{13}+g'\alpha_{23}+(b'-c'+f'-1)g'\cdot\alpha_{28}-(b'-c'$$
$$+f'-1)g'\cdot\beta_{28} \text{ und}$$

$$f'\beta_{29} = -\alpha_2-\alpha_5-\frac{f'}{b}\cdot\alpha_{13}-f'g'\cdot\beta_{28}-(b'+f')\cdot\alpha_{29}+f'g'\cdot\alpha_{28};$$

Gleichungen 3, 4 und 6 sind befriediget.

b) Der Koeffizient von $C_3'^2$ muss sein von der Form: $(u_1x_1^2+u_2x_2^2+u_3x_3^2+u_4x_1x_2+u_5x_1x_3+u_6x_2x_3)\ C_3$, woraus

(1) $\alpha_{10}+\alpha_{14}+\alpha_{15}-g\alpha_{25}-g\alpha_{26}+g^2\alpha_{28}+\beta_{14}+2\beta_{15}-g\beta_{26}$
$= cu_1+au_4+u_5;$

(2) $-\alpha_{14}-2\alpha_{15}+g\alpha_{26}-\beta_{15} = du_1+bu_4+au_5;$

(3) $\alpha_{15} = fu_1+bu_5;$

(4) $\alpha_{19}+\alpha_{20}+2\beta_{10}+\beta_{14}+\beta_{19}+2\beta_{20}-g\beta_{25} = au_2+cu_4+u_6;$

(5) $-2\alpha_{10}-\alpha_{14}-\alpha_{19}-2\alpha_{20}+g\alpha_{25}-\beta_{14}-\beta_{20} = bu_2+u_3+du_4$
$+cu_5+au_6;$

(6) $\alpha_{14}+\alpha_{20} = fu_4+au_3+du_5+bu_6;$

(7) $\alpha_{10}+\alpha_{19}+\alpha_{21} = fu_2+cu_3+du_6;$

(8) $-\alpha_{19}-2\alpha_{21}-\beta_{10}-\beta_{19}-\beta_{21} = du_2+cu_6;$

(9) $\alpha_{21}+\beta_{19}+2\beta_{21} = cu_2$

(10) $-\beta_{10}-\beta_{14}-\beta_{15}+g\beta_{25}+g\beta_{26}-g^2\beta_{28} = u_4;$

(11) $$-\beta_{19}-\beta_{20}=u_2;$$
(12) $$\beta_{21}=0;$$
(13) $$u_1=0;$$
(14) $$bu_3+fu_5=0;$$
(15) $$du_3+fu_6=0;$$
(16) $$fu_3=0.$$

Lösungen hiezu:

$$u_1=0; \qquad u_3=0; \qquad u_5=0; \qquad u_6=0;$$

$$u_2=\frac{1}{b'}\cdot\alpha_{17}; \quad u_4=\frac{1}{f}\cdot\alpha_{11}+\frac{1}{f}\cdot\alpha_{20};$$

$$\beta_{10}=0;$$

$$\beta_{14}=-\frac{d+f}{f}\cdot\alpha_{14}-\frac{b+d+2f-1}{b'}\cdot\alpha_{17}-\frac{d+2f}{f}\cdot\alpha_{20}+g\alpha_{25};$$

$$\beta_{15}=-\frac{b+f}{f}\cdot\alpha_{14}-\frac{b}{f}\alpha_{20}+g\alpha_{26};$$

$$\beta_{19}=0; \qquad \beta_{20}=-\frac{1}{b'}\cdot\alpha_{17}; \qquad \beta_{21}=0;$$

$$g\beta_{25}=-\frac{c+d+f}{f}\cdot\alpha_{14}-\frac{c+d+f}{f}\cdot\alpha_{20}-\frac{a+b+2c+2d+2f+1}{b'}\cdot\alpha_1$$
$$+g\alpha_{25};$$

$$g\beta_{26}=-\frac{a+2b+d+2f}{f}\cdot\alpha_{14}-\frac{a+2b+d+2f}{f}\cdot\alpha_{20}-\frac{b-c+f-1}{b'}\cdot\alpha_1$$
$$+g\alpha_{26}+g^2\alpha_{28};$$

$$g^2\beta_{28}=-\frac{g}{f}\cdot\alpha_{14}-\frac{g}{f}\cdot\alpha_{20}-\frac{g}{b'}\cdot\alpha_{17}+g^2\alpha_{28}.-$$

Gleichung 3 ist befriediget.

c) Endlich muss sein der Koeffizient von C_3C_3' gleich $-(v_1x_1^2+v_4x_1x_4+v_6x_1x_3)C_3-(u_2x_2^2+u_4x_1x_2)C_3'$.

Die Vergleichung der Koeffizienten gibt Folgendes:

(1) $$\alpha_9+\alpha_{13}+\beta_{13}=-av_1-c'u_4;$$
(2) $$-\alpha_{13}=-bv_1;$$
(3) $$\alpha_7+\alpha_8+\alpha_{11}-g\alpha_{22}-g\alpha_{23}+g'\alpha_{25}+g'\alpha_{26}-2gg'\alpha_{28}-f\alpha_{29}+\beta_7$$
$$+2\beta_9+2\beta_{11}+\beta_{13}-g\beta_{22}+g'\beta_{26}-2f\beta_{29}$$
$$=-cv_1-av_4-v_6-c'u_2-a'u_4;$$
(4) $$-\alpha_7-2\alpha_9-2\alpha_{11}-\alpha_{13}+g\alpha_{22}-g'\alpha_{26}+2f\alpha_{29}-\beta_{11}-\beta_{13}+f\beta_{29}$$
$$=-dv_1-bv_4-av_6-d'u_4;$$
(5) $$\alpha_{11}+\alpha_{12}-f\alpha_{29}=fv_1-bv_6;$$

(6) $\beta_{16}+\beta_{17}=0;$

(7) $-\alpha_7-2\alpha_8-2\alpha_{16}-\alpha_{17}+g\alpha_{23}-g'\alpha_{25}+f\alpha_{29}-\beta_7-\beta_9-\beta_{16}+2f\beta_{29}=-dv_4-cv_6-d'u_2-b'u_4;$

(8) $\alpha_7+\alpha_9+\alpha_{16}-2f\alpha_{29}-f\beta_{29}=-fv_4-dv_6-f'u_4;$

(9) $\alpha_8+\alpha_{17}=-f'u_2;$

(10) $\alpha_{17}+\beta_8+\beta_{17}=b'u_2;$

(11) $\beta_9+\beta_{18}=v_1+u_4;$

(12) $-\beta_7-\beta_8-\beta_{11}+g\beta_{22}+g\beta_{23}-g'\beta_{25}-g'\beta_{26}+2gg'\beta_{28}+f\beta_{29}=-v_4-u_2;$

(13) $\alpha_{16}+\alpha_{17}+\beta_7+2\beta_8+2\beta_{16}+2\beta_{17}-g\beta_{23}+g'\beta_{25}-f\beta_{29}=-cv_4-a'u_2;$

(14) $\beta_{17}=0;$

(15) $f\alpha_{29}=-fv_6.$ —

Lösungen hiezu:

$$\beta_7=-\frac{2f}{f'}.(\alpha_2+\alpha_5)-\alpha_7-\alpha_9-2\alpha_{16}+\frac{b'-c'-1}{f}.(\alpha_{14}+\alpha_{20})$$
$$-\frac{a+b+d+2f+1}{b}.\alpha_{13}+\frac{b'+d'+2f'}{b'}.\alpha_{17}+g\alpha_{23}-g'\alpha_{25}$$
$$+(d+2f)g'.\alpha_{28}-(d+2f)g'.\beta_{28}-\frac{2b'f+cf'-df'+ff'}{f'}.\alpha_{29};$$

$\beta_8=0;$

$$\beta_9=\alpha_9+\frac{a+b+1}{b}.\alpha_{13}+\frac{c'+1}{f}.(\alpha_{14}+\alpha_{20});$$

$$\beta_{11}=-\frac{f}{f'}.(\alpha_2+\alpha_5)-\alpha_7-\alpha_9+\frac{a+b+d+f}{b}.\alpha_{13}+\frac{c'+d'}{b}$$
$$.(\alpha_{14}+\alpha_{20})+g\alpha_{22}-g'\alpha_{26}+(b+f)g'.\alpha_{28}-(b+f)g'\beta_{28}$$
$$-\frac{af'+bf'+ff'+b'f}{f}.\alpha_{29};$$

$$\beta_{13}=-\alpha_9-\frac{a+b}{b}.\alpha_{13}-\frac{c'}{f}.(\alpha_{14}+\alpha_{20});$$

$\beta_{16}=0$ und $\beta_{17}=0.$ —

Die Gleichungen 2, 5, 9 und 15 stimmen unmittelbar; aber auch die Gleichungen 3, 8, 12 und 13 stimmen, wenn man es nicht unterlässt, die Gleichung $(\alpha_2+\alpha_5).f^2+(\alpha_7+\alpha_9+\alpha_{16}).ff'+(\alpha_{14}+\alpha_{20}).f'^2+(b'f_2-dff')=0$ zu gebrauchen, welche bei Aufsuchung der 12ten quadratischen Relation aufgestellt worden ist.

§ 6.

Aufsuchung der Koeffizienten der 14ten Relation.

Die 14te quadratische Relation der φ heisst $f_8 . x_2 x_3 = 0$ und besteht infolge der Gleichung $f_8 = 0$; diese Relation kann nach dem Früheren auch geschrieben werden in der Form $\frac{1}{x_1 x_2} . \Sigma \alpha_j . \varphi_i \varphi_k . x_2 x_3 = 0$, wo die α_j so bestimmt sind wie in der 12ten Relation; diese 14te Relation lässt sich aber auch schreiben in der Form $\Sigma \gamma_j . \varphi_i \varphi_k = 0$, wo die γ_j vorderhand noch unbestimmt sind; es muss dann folgende Identität gelten:

$$x_3 . \Sigma \alpha_j . \varphi_i \varphi_k - x_1 . \Sigma \gamma_j . \varphi_i \varphi_k = 0. -$$

a) Hier muss der Koeffizient von C_3^2 ein Vielfaches von C_3' sein, also sein von der Form $(v_1 x_1^2 + v_2 x_2^2 + v_3 x_3^2 + v_4 x_1 x_2 + v_5 x_2 x_3 + v_6 x_1 x_3) . C_3'$. Daher rühren folgende Bedingungsgleichungen:

$$(1) \quad \alpha_6 + \gamma_4 + 2\gamma_6 = c' v_1;$$

$$(2) \quad \alpha_4 + \alpha_5 + 2\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_4 + 2\gamma_5 + g'\gamma_{22} + 2f'\gamma_{29} = a' v_1 + c' v_4 + v_6;$$

$$(3) \quad -\alpha_4 - 2\alpha_6 - \gamma_1 - \gamma_4 - \gamma_6 - f'\gamma_{29} = d' v_1 + c' v_6$$

$$(4) \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + g'\alpha_{22} + g'\alpha_{23} + g'^2\alpha_{28} + f'\alpha_{29} + \gamma_2 + 2\gamma_3 + g'\gamma_{23} + f'\gamma_{29} = c' v_2 + a' v_4 + v_5;$$

$$(5) \quad -2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_4 - 2\alpha_5 - g'\alpha_{22} - 2f'\alpha_{29} - \gamma_2 - \gamma_5 - 2f'\gamma_{29} = b' v_1 + v_3 + d' v_4 + c' v_5 + a' v_6;$$

$$(6) \quad \alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_6 + f'\alpha_{29} + f'\gamma_{29} = f' v_1 + c' v_3 + d' v_6;$$

$$(7) \quad -\alpha_2 - 2\alpha_3 - g'\alpha_{23} - f'\alpha_{29} - \gamma_3 = d' v_2 + b' v_4 + a' v_5;$$

$$(8) \quad \alpha_2 + \alpha_5 + 2f'\alpha_{29} = a' v_3 + f' v_4 + d' v_5 + b' v_6;$$

$$(9) \quad \alpha_3 = f' v_2 + b' v_5;$$

$$(10) \quad \gamma_6 = 0;$$

$$(11) \quad -\gamma_4 - \gamma_5 = v_1;$$

$$(12) \quad -\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 - g'\gamma_{22} - g'\gamma_{23} - g'^2\gamma_{28} - f'\gamma_{29} = v_4;$$

$$(13) \quad -f'\alpha_{29} = d' v_3 + f' v_6;$$

$$(14) \quad 0 = v_2;$$

$$(15) \quad 0 = b' v_3 + f' v_5;$$

$$(16) \quad 0 = f' v_3.$$

Die Lösungen hiezu sind:

$$v_1 = \frac{1}{b} . \alpha_{13} + \gamma_{29}; \qquad v_2 = 0; \qquad v_3 = 0;$$

$$v_4 = \frac{1}{f'} . (\alpha_2 + \alpha_5) + \frac{b' + 2f'}{f'} . \alpha_{29}; \qquad v_5 = 0; \qquad v_6 = -\alpha_{29};$$

$$\gamma_1 = -(c'+d'+f')\cdot\gamma_{29};$$

$$\gamma_2 = -\frac{d'+f'}{f'}\cdot\alpha_2 - \frac{d'+2f'}{f'}\cdot\alpha_5 - \frac{b'+d'+2f'-1}{b}\cdot\alpha_{13} - g\alpha_{22} + \frac{(a'+c')f'-b'd'}{f'}\cdot\alpha_{29} - (b'-c'+2f'-1)\cdot\gamma_{29};$$

$$\gamma_3 = -\frac{b'+f'}{f'}\cdot\alpha_2 - \frac{b'}{f'}\cdot\alpha_5 - g'\alpha_{23} - \frac{(b'+f')^2}{f'}\cdot\alpha_{29};$$

$$\gamma_4 = c'\cdot\gamma_{29}; \quad \gamma_5 = -\frac{1}{b}\cdot\alpha_{13} - (c'+1)\cdot\gamma_{29}; \quad \gamma_6 = 0;$$

$$g'\gamma_{22} = \frac{(c'+d'+f')}{f'}\cdot(\alpha_2+\alpha_5) + \frac{a'+b'+2c'+2d'+2f'+1}{b}\cdot\alpha_{13} + g'\alpha_{22} + \frac{b'(c'+d')-f'(a'+1)}{f'}\cdot\alpha_{29} + (a'+b'+2c'+2d'+2f'+1)\cdot\gamma_{29};$$

$$g'\gamma_{23} = \frac{a'+2b'+d'+2f'}{f'}\cdot(\alpha_2+\alpha_5) + \frac{b'-c'+f'-1}{b}\cdot\alpha_{13} + g'\alpha_{23} - g'^2\alpha_{28} + \frac{(a'+2b'+d'+2f')(b'+f')}{f'}\cdot\alpha_{29} + (b'-c'+f'-1)\cdot\gamma_{29};$$

$$g'^2\cdot\gamma_{28} = -\frac{g'}{f'}\cdot(\alpha_2+\alpha_5) - \frac{g'}{b}\cdot\alpha_{13} + g'^2\cdot\alpha_{28} - \frac{(a'+b'+1)f'+b'g'}{f'}\cdot\alpha_{29} - (a'+b'+2c'+2d'+2f'+1)\cdot\gamma_{29}.$$

b) Der Koeffizient von $C_3'^2$ muss die Form haben

$$(u_1x_1^2+u_2x_2^2+u_3x_3^2+u_4x_1x_2+u_5x_2x_3+u_6x_1x_3)C_3.$$

Deswegen bestehen die Gleichungen:

(1) $\alpha_{10}+\alpha_{14}+\alpha_{15}-g\alpha_{25}-g\alpha_{26}+g^2\alpha_{28}+2\gamma_{10}+\gamma_{14}+\gamma_{19}+2\gamma_{20}-g\gamma_{25} = cu_1+au_4+u_6;$

(2) $-\alpha_{14}-2\alpha_{15}+g\alpha_{26}-\gamma_{14}-\gamma_{20} = du_1+bu_4+au_6;$

(3) $-2\alpha_{10}-\alpha_{14}-\alpha_{19}-2\alpha_{20}+g\alpha_{25}-\gamma_{10}-\gamma_{19}-\gamma_{21} = bu_2+u_3+du_4+au_5+cu_6;$

(4) $\alpha_{15} = fu_1+bu_6;$

(5) $\alpha_{19}+\alpha_{20}+\gamma_{19}+2\gamma_{21} = au_2+cu_4+u_5;$

(6) $\alpha_{14}+\alpha_{20} = au_3+fu_4+bu_5+du_6;$

(7) $\alpha_{10}+\alpha_{19}+\alpha_{21} = fu_2+cu_3+du_5;$

(8) $-\alpha_{19}-2\alpha_{21} = du_2+cu_5;$

(9) $\alpha_{21} = cu_2;$

(10) $-\gamma_{10}-\gamma_{14}-\gamma_{15}+g\gamma_{25}+g\gamma_{26}-g^2\gamma_{28} = u_1;$

(11) $\gamma_{14}+2\gamma_{15}-g\gamma_{26}=au_1;$

(12) $-\gamma_{15}=bu_1;$

(13) $-\gamma_{19}-\gamma_{20}=u_4;$

(14) $-\gamma_{21}=u_2;$

(15) $0=bu_3+fu_6;$

(16) $0=du_3+fu_5;$

(17) $0=fu_3.$

Die Lösungen hiezu sind:

$$u_1=0; \qquad u_2=\frac{1}{b'}\cdot\alpha_{17}; \qquad u_3=0;$$

$$u_4=\frac{1}{f}\cdot(\alpha_{14}+\alpha_{20}); \qquad u_5=0; \qquad u_6=0;$$

$$\gamma_{10}=-\frac{c+d+f}{f}\cdot(\alpha_{14}+\alpha_{20})-\frac{a+b+2c+2d+2f+1}{b'}\cdot\alpha_{17}+g\alpha_{25};$$

$$\gamma_{14}=-\frac{b-c+f-1}{f}\cdot(\alpha_{14}+\alpha_{20})-\frac{a+2c+d+2}{b'}\cdot\alpha_{17}+g\alpha_{26};$$

$$\gamma_{15}=0;$$

$$\gamma_{19}=\frac{c}{f}\cdot\alpha_{14}+\frac{c-f}{f}\cdot\alpha_{20}+\frac{a+2c+d+2}{b'}\cdot\alpha_{17};$$

$$\gamma_{20}=-\frac{c+1}{f}\cdot\alpha_{14}-\frac{c-f+1}{f}\cdot\alpha_{20}-\frac{a+2c+d+2}{b'}\cdot\alpha_{17};$$

$$\gamma_{21}=-\frac{1}{b'}\cdot\alpha_{17}; \qquad g\gamma_{26}=\gamma_{14};$$

$$g\gamma_{25}=-\frac{a+b+2c+2d+2f+1}{f}\cdot(\alpha_{14}+\alpha_{20})-\frac{2a+2b+3c+3d+3f+2}{b'}\cdot\alpha_{17}+g\alpha_{25}+g^2\alpha_{28};$$

$$g^2\gamma_{28}=-\frac{g}{f}\cdot(\alpha_{14}+\alpha_{20})-\frac{g}{b'}\cdot\alpha_{17}+g^2\cdot\alpha_{28}.$$

Die Gleichungen 7 und 8 sind erfüllt.

c) Der Koeffizient von C_3C_3' muss identisch sein mit $-(v_1x_1^2+v_4x_1x_2+v_6x_1x_3)C_3-(u_2x_2^2+u_4x_1x_2)C_3'$.

Durch Koeffizientenvergleichung erhält man folgende Gleichungen:

(1) $\alpha_9+\alpha_{13}+\gamma_7+2\gamma_9+2\gamma_{11}+\gamma_{13}-g\gamma_{22}+g'\gamma_{26}-2f\gamma_{29}=-av_1-c'u_4;$

(2) $-\alpha_{13}-\gamma_{11}-\gamma_{13}+f\gamma_{29}=-bv_1;$

$$(3)\quad \alpha_7+\alpha_8+\alpha_{11}-g\alpha_{22}-g\alpha_{23}+g'\alpha_{25}+g'\alpha_{26}-2gg'\alpha_{28}-f\alpha_{29}+\gamma_7 +2\gamma_8+2\gamma_{16}+\gamma_{17}-g\gamma_{23}+g'\gamma_{25}-f\gamma_{29}=-cv_1-av_4-v_6 -c'u_2-a'u_4;$$

$$(4)\quad -\alpha_7-2\alpha_9-2\alpha_{11}-\alpha_{13}+g\alpha_{22}-g'\alpha_{26}+2f\alpha_{29}-\gamma_7-\gamma_9-\gamma_{16} +2f\gamma_{29}=-dv_1-av_6-d'u_4-bv_4;$$

$$(5)\quad \alpha_{11}+\alpha_{13}-f\alpha_{29}-f\gamma_{29}=-fv_1-bv_6;$$

$$(6)\quad \alpha_{16}+\alpha_{17}+\gamma_{17}=-cv_4-a'u_2;$$

$$(7)\quad -\alpha_7-2\alpha_8-2\alpha_{16}-\alpha_{17}+g\alpha_{23}-g'\alpha_{25}+f\alpha_{29}-\gamma_8-\gamma_{17} =-dv_4-cv_6-d'u_2-b'u_4;$$

$$(8)\quad \alpha_7+\alpha_9+\alpha_{16}-2f\alpha_{29}=-fv_4-dv_6-f'u_4;$$

$$(9)\quad f\alpha_{29}=-fv_6;$$

$$(10)\quad \alpha_8+\alpha_{17}=-f'u_2;$$

$$(11)\quad \alpha_{17}=b'u_2;$$

$$(12)\quad \gamma_9+\gamma_{13}=0;$$

$$(13)\quad \gamma_{13}=0;$$

$$(14))\quad -\gamma_7-\gamma_8-\gamma_{11}+g\gamma_{22}+g\gamma_{23}-g'\gamma_{25}-g'\gamma_{26}+2gg'\gamma_{28}+f\gamma_{29} =-v_1-u_4;$$

$$(15)\quad \gamma_{16}+\gamma_{17}=v_4+u_2.$$

Hieraus als Lösungen:

$$\gamma_7=\frac{b-c-1}{f'}\cdot(\alpha_2+\alpha_5)-\alpha_7-2\alpha_9-\alpha_{16}+\frac{b+d+2f}{b}\cdot\alpha_{13} -\frac{a'+b'+1}{b'}\cdot\alpha_{17}+\frac{d'}{f}\cdot(\alpha_{14}+\alpha_{20})+g\alpha_{22}-g'\alpha_{26} +\frac{b'(b-c-1)-f'(a+2c+2)}{f'}\cdot\alpha_{29}+(d+2f)\cdot\gamma_{29};$$

$$\gamma_8=\frac{c+d}{f'}\cdot(\alpha_2+\alpha_5)-\alpha_7-\alpha_{16}+\frac{b'}{f}\cdot(\alpha_{14}+\alpha_{20})+g\alpha_{23}-g'\alpha_{25} +\frac{a'+2b'+d'+2f'}{b'}\cdot\alpha_{17}+\frac{b'(c+d)+f'(c+2d+f)}{f'}\cdot\alpha_{29};$$

$$\gamma_9=0;$$

$$\gamma_{11}=(b+f)\cdot\gamma_{29};$$

$$\gamma_{13}=0;$$

$$\gamma_{16}=\frac{c+1}{f'}\cdot(\alpha_2+\alpha_5)+\alpha_{16}+\frac{a'+b'+1}{b'}\cdot\alpha_{17}+\frac{(c+1)(b'+2f')}{f'}\cdot\alpha_{29}$$

und

$$\gamma_{17}=-\frac{c}{f'}\cdot(\alpha_2+\alpha_5)-\alpha_{16}-\frac{a'+b'}{b'}\cdot\alpha_{17}+\frac{c(b'+2f')}{f'}\cdot\alpha_{29}.$$

Die Gleichungen 1, 3, 5, 8, 9, 10, 11 und 14 sind durch die gefundenen Werte befriediget, wenn man die Gleichungen 11, 12 und 13 von § 4 berücksichtigt.

§ 7.

Aufsuchung der Koeffizienten der 15ten Relation.

Die 15te Relation heisst $f_8 \cdot x_3^2 = 0$; sie besteht infolge der Gleichung $f_8 = 0$ und kann auch geschrieben werden entweder in der Form $\frac{1}{x_1 x_2} \cdot x_3^2 \cdot \Sigma \alpha_j \cdot \varphi_i \varphi_k = 0$ — die α haben hier dieselbe Bedeutung wie in der 12ten Relation — oder in der Form $\Sigma \delta_j \cdot \varphi_i \varphi_k = 0$, wo die Grössen δ vorderhand noch unbekannt sind. Es muss also bestehen die Identität

$$x_3^2 \cdot \Sigma \alpha_j \varphi_i \varphi_k - x_1 x_2 \cdot \Sigma \delta_j \ \varphi_i \varphi_k = 0. —$$

a) Der Koeffizient von C_3^2 muss sein $(u_1 x_1^3 + u_2 x_1^2 x_2 + u_3 x_1^2 x_3 + u_4 x_1 x_2^2 + u_5 x_1 x_2 x_3 + u_6 x_1 x_3^2 + u_7 x_2^3 + u_8 x_2^2 x_3 + u_9 x_2 x_3^2 + u_{10} x_3^3) \cdot C_3'$. —

Die Vergleichung der Koeffizienten gibt:

(1) $\alpha_6 = d'u_1 + c'u_3;$

(2) $\alpha_4 + \alpha_5 - \delta_1 - \delta_4 - \delta_6 - f'\delta_{29} = b'u_1 + d'u_2 + a'u_3 + c'u_5 + u_6;$

(3) $-\alpha_4 - 2\alpha_6 = f'u_1 + d'u_3 + c'u_6;$

(4) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + g'\alpha_{22} + g'^2\alpha_{23} + g'^2\alpha_{28} + f'\alpha_{29} - \delta_2 - \delta_5 - 2f'\delta_{29} = b'u_2 + d'u_4 + a'u_5 + c'u_8 + u_9;$

(5) $-2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_4 - 2\alpha_5 - g'\alpha_{22} - 2f'\alpha_{29} + f'\delta_{29} = f'u_2 + b'u_3 + d'u_5 + a'u_6 + c'u_9 + u_{10};$

(6) $\alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_6 + f'\alpha_{29} = f'u_3 + d'u_6 + c'u_{10};$

(7) $-\alpha_2 - 2\alpha_3 - g'\alpha_{23} - f'\alpha_{29} = f'u_4 + b'u_5 + d'u_8 + a'u_9;$

(8) $\alpha_2 + \alpha_5 + 2f'\alpha_{29} = f'u_5 + b'u_6 + d'u_9 + a'u_{10};$

(9) $\alpha_3 = f'u_8 + b'u_9;$

(10) $-f'\alpha_{29} = f'u_6 + d'u_{10};$

(11) $-\delta_6 = u_1;$

(12) $-\delta_4 - \delta_5 = u_2;$

(13) $\delta_4 + 2\delta_6 = a'u_1 + c'u_2 + u_3;$

(14) $-\delta_1 - \delta_2 - \delta_3 - g'\delta_{22} - g'\delta_{23} - g'^2\delta_{28} - f'\delta_{29} = u_4;$

(15) $2\delta_1 + \delta_2 + \delta_4 + 2\delta_5 + g'\delta_{22} + 2f'\delta_{29} = a'u_2 + c'u_4 + u_5;$

(16) $\delta_2 + 2\delta_3 + g'\delta_{23} + f'\delta_{29} = a'u_4 + c'u_7 + u_8;$

(17) $-\delta_3 = b'u_4 + d'u_7 + a'u_8;$

(18) $u_1 = 0;$

(19) $u_7 = 0;$

(20) $u_{10} = 0;$

(21) $$f'u_7+b'u_8=0;$$

(22) $$f'u_9+b'u_{10}=0.-$$

Lösungen hiezu:

$$u_1=0;\quad u_7=0;\quad u_8=0;\quad u_9=0;\quad u_{10}=0;$$

$$u_2=-\frac{d'+f'}{f'^2}\cdot\alpha_2-\frac{d'+2f'}{f'^2}\cdot\alpha_5-\frac{b'+d'+2f'}{bf'}\cdot\alpha_{13}-\frac{g'}{f'}\cdot\alpha_{22}+\frac{(a'+c')f'-b'd'}{f'^2}\cdot\alpha_{29}+\delta_{29};$$

$$u_3=\frac{1}{b}\cdot\alpha_{13};\quad u_5=\frac{1}{f'}\cdot(\alpha_2+\alpha_5)+\frac{b'+2f'}{f'}\cdot\alpha_{29};\quad u_6=-\alpha_{29};$$

$$u_4=-\frac{b'+f'}{f'^2}\cdot\alpha_2-\frac{b'}{f'^2}\cdot\alpha_5-\frac{g'}{f'}\cdot\alpha_{23}-\frac{(b'+f')^2}{f'^2}\cdot\alpha_{29};$$

$$\delta_1=\frac{d'(c'+d'+f')}{f'^2}\cdot\alpha_2+\frac{(d'+f')(c'+d'+f')}{f'^2}\cdot\alpha_5+\frac{(c'+d')(b'+d'+f')-(a'+c'+1)f'}{bf'}\cdot\alpha_{13}+\frac{(c'+d')g'}{f'}\cdot\alpha_{22}+\frac{(c'+d')b'd'-(a'+c')(c'+d')f'-c'f'(b'+f')+f'^2}{f'^2}\cdot\alpha_{29}-(c'+d'+f')\cdot\delta_{29};$$

$$\delta_2=\frac{d'(2b'-c'-1)-f'(a'-b'+c'-d'-f'+1)}{f'^2}\cdot\alpha_2+\frac{d'(2b'-c'-1)-f'(a'-2b'+2c'+2)}{f'^2}\cdot\alpha_5+\frac{(b'+d'+f')(b'-c'+f'-1)}{bf'}\cdot\alpha_{13}+\frac{(b'-c'+f'-1)g'}{f'}\cdot\alpha_{22}+\frac{(d'+f')g'}{f'}\cdot\alpha_{23}+\frac{(b'-c'-1)\{b'd-(a'+c')f'\}-(c'+d')f'^2+d'(b'+f')^2-a'f'(b'+2f')}{f'^2}\cdot\alpha_{29}+g'^2\alpha_{28}-(b'-c'+2f'-1)\cdot\delta_{29};$$

$$\delta_3=\frac{b'(b'+f')}{f'^2}\cdot\alpha_2+\frac{b'^2}{f'^2}\cdot\alpha_5+\frac{b'g'}{f'}\cdot\alpha_{23}+\frac{b'(b'+f')^2}{f'^2}\cdot\alpha_{29};$$

$$\delta_4=-\frac{c'(d'+f')}{f'^2}\cdot\alpha_2-\frac{c'(d'+2f')}{f'^2}\cdot\alpha_5-\frac{c'(b'+d'+2f')-f'}{bf'}\cdot\alpha_{13}-\frac{c'g'}{f'}\cdot\alpha_{22}+\frac{(a'+c')c'f'-b'c'd'}{f'^2}\cdot\alpha_{29}+c'\cdot\delta_{29};$$

$$\delta_5 = \frac{(c'+1)(d'+f')}{f'^2}\cdot\alpha_2 + \frac{(c'+1)(d'+2f')}{f'^2}\cdot\alpha_5$$
$$+\frac{(c'+1)(b'+d'+2f')-f'}{bf'}\cdot\alpha_{13} + \frac{(c'+1)g'}{f'}\cdot\alpha_{22}$$
$$-\frac{(a'+c')(c'+1)f'-(c'+1)b'd'}{f'^2}\cdot\alpha_{29} - (c'+1)\cdot\delta_{29};$$

$$\delta_6 = 0;$$

$$g'\delta_{22} = -\frac{d'(a'+2b'+2c'+2d'+2f'+1)+b'c'+f'(b'+c'+d'+f')}{f'^2}\cdot\alpha_2$$
$$-\frac{d'(a'+2b'+2c'+2d'+2f'+1)+b'c'+f'(a'+2b'+2c'+2d'+2f'+1)}{f'^2}\cdot\alpha_5$$
$$-\frac{(b'+d')(a'+b'+2c'+2d'+2f'+1)+f'(c'+d'+f')}{bf'}\cdot\alpha_{13}$$
$$-\frac{(a'+b'+2c'+2d'+f'+1)}{f'}\cdot\alpha_{22} - \frac{(c'+d'+f')g'}{f'}\cdot\alpha_{23}$$
$$-g'^2\alpha_{28}+(a'+b'+2c'+2d'+2f'+1)\cdot\delta_{29}$$
$$+\frac{(a'f'+c'f'-b'd')(a'+b'+2c'+2d'+2f'+1)+b'f'(a'+1)-b'^2(c'+d')}{f'^2}\cdot\alpha_{29};$$

$$g'\delta_{23} = \frac{d'(c'+1)-b'(a'+2b'+2d')+f'(-3b'+c'-d'-f'+1)}{f'^2}\cdot\alpha_3$$
$$+\frac{d'(c'+1)-b'(a'+2b'+2d')+f'(a'-2b'+2c'+2)}{f'^2}\cdot\alpha_5$$
$$-\frac{(b'+d'+f')(b'-c'+f'-1)}{bf'}\cdot\alpha_{13} - \frac{(b'-c'+f'-1)g'}{f'}\cdot\alpha_{22}$$
$$-\frac{(a'+2b'+d'+f')g'}{f'}\cdot\alpha_{23}$$
$$+\frac{(-b'+c'+1)(b'd'-a'f'-c'f')+(c'+d')f'^2-(a'+2b'+d')(b'+f')^2+a'f'(b'+2f')}{f'^2}\cdot\alpha$$
$$-g'^2\alpha_{28}+(b'-c'+f'-1)\cdot\delta_{29};$$

$$g'^2\delta_{28} = \frac{(b'+d'+f')g'}{f'^2}\cdot(\alpha_2+\alpha_5)+\frac{(b'+d'+f')g'}{bf'}\cdot\alpha_{13}+\frac{g'^2}{f'}\cdot\alpha_{22}$$
$$+\frac{g'^2}{f'}\cdot\alpha_{23}+g'^2\alpha_{28}+\frac{\{b'(b'+d'+f')-f'(a'+c')\}}{f'^2}g'\cdot\alpha_{29}-g'\delta_{29}.-$$

b) Der Koeffizient von $C_3'^2$ muss identisch sein mit $(v_1x_1^3+v_2x_1^2x_2+v_3x_1^2x_3+v_4x_1x_2^2+v_5x_1x_2x_3+v_6x_1x_3^2+v_7x_2^3+v_8x_2^2x_3+v_9x_2x_3^2+v_{10}x_3^3)\cdot C_3$.

Die Vergleichung der Koeffizienten gibt:

(1) $\alpha_{10}+\alpha_{14}+\alpha_{15}-g\alpha_{25}-g\alpha_{26}+g^2\alpha_{28}-\delta_{14}-\delta_{20}$
$$= dv_2+cv_3+av_5+v_6+bv_4;$$

$$(2)\quad -\alpha_{14}-2\alpha_{15}+g\alpha_{26}=fv_2+dv_3+bv_5+av_6;$$

$$(3)\quad -2\alpha_{10}-\alpha_{14}-\alpha_{19}-2\alpha_{20}+g\alpha_{25}=fv_4+dv_5+cv_6+bv_8+av_9+v_{10};$$

$$(4)\quad \alpha_{15}=fv_3+bv_6;$$

$$(5)\quad \alpha_{19}+\alpha_{20}-\delta_{10}-\delta_{19}-\delta_{21}=dv_4+cv_5+bv_7+av_8+v_9;$$

$$(6)\quad \alpha_{14}+\alpha_{20}=fv_5+dv_6+bv_9+av_{10};$$

$$(7)\quad \alpha_{10}+\alpha_{19}+\alpha_{21}=fv_8+dv_9+cv_{10};$$

$$(8)\quad -\alpha_{19}-2\alpha_{21}=fv_7+dv_8+cv_9;$$

$$(9)\quad \alpha_{21}=dv_7+cv_8;$$

$$(10)\quad -\delta_{10}-\delta_{14}-\delta_{15}+g\delta_{25}+g\delta_{26}-g^2\delta_{28}=v_2;$$

$$(11)\quad \delta_{14}+2\delta_{15}-g\delta_{26}=cv_1+av_2+v_3;$$

$$(12)\quad 2\delta_{10}+\delta_{14}+\delta_{19}+2\delta_{20}-g\delta_{25}=cv_2+av_4+v_5;$$

$$(13)\quad -\delta_{15}=dv_1+bv_2+av_3;$$

$$(14)\quad -\delta_{19}-\delta_{20}=v_4;$$

$$(15)\quad \delta_{19}+2\delta_{21}=cv_4+av_7+v_8;$$

$$(16)\quad -\delta_{21}=v_7;$$

$$(17)\quad v_1=0;$$

$$(18)\quad fv_1+bv_3=0;$$

$$(19)\quad fv_6+bv_{10}=0;$$

$$(20)\quad cv_7=0;$$

$$(21)\quad fv_9+dv_{10}=0;$$

$$(22)\quad v_{10}=0.$$

Die Lösungen dieses Systemes sind:

$$v_1=0;\quad v_3=0;\quad v_6=0;\quad v_7=0;\quad v_9=0;\quad v_{10}=0,$$

$$v_8=\frac{1}{b'}\cdot\alpha_{17};\qquad v_5=\frac{1}{f}\cdot(\alpha_{14}+\alpha_{20});$$

$$v_2=-\frac{b+f}{f^2}\cdot\alpha_{14}-\frac{b}{f^2}\cdot\alpha_{20}+\frac{g}{f}\cdot\alpha_{26};$$

$$v_4=-\frac{d+f}{f^2}\cdot\alpha_{14}-\frac{d+2f}{f^2}\cdot\alpha_{20}-\frac{b+d+2f}{b'f}\cdot\alpha_{17}+\frac{g}{f}\cdot\alpha_{25};$$

$$\delta_{10}=\frac{d(c+d+f)}{f^2}\cdot\alpha_{14}+\frac{(d+f)(c+d+f)}{f^2}\cdot\alpha_{20}-\frac{(c+d)g}{f}\cdot\alpha_{25}$$
$$+\frac{(c+d)(b+d+f)-f(a+c+1)}{b'f}\cdot\alpha_{17};$$

$$\delta_{14}=\frac{d(2b-c-1)-f(a-b+c-d-f+1)}{f^2}\cdot\alpha_{14}$$
$$+\frac{d(2b-c-1)-f(\alpha-2b+2c+2)}{f^2}\cdot\alpha_{20}+\frac{(b+d+f)(b-c+f-1)}{b'f}\cdot\alpha_{17}$$

$$-\frac{(b-c+f-1)g}{f}\cdot\alpha_{25}-\frac{(d+f)g}{f}\cdot\alpha_{26}+g^2\alpha_{28};$$

$$\delta_{15}=\frac{b(b+f)}{f^2}\cdot\alpha_{14}+\frac{b^2}{f^2}\cdot\alpha_{20}-\frac{bg}{f}\cdot\alpha_{26};$$

$$\delta_{19}=-\frac{c(d+f)}{f^2}\cdot\alpha_{14}-\frac{c(d+2f)}{f^2}\cdot\alpha_{20}-\frac{c(b+d+2f)-f}{b'f}\cdot\alpha_{17}+\frac{cg}{f}\cdot\alpha_{25};$$

$$\delta_{20}=\frac{(c+1)(d+f)}{f^2}\cdot\alpha_{14}+\frac{(c+1)(d+2f)}{f^2}\cdot\alpha_{20}+\frac{(c+1)(b+d+2f)\ f}{b'f}\cdot\alpha_{17}$$
$$-\frac{(c+1)g}{f}\cdot\alpha_{25};$$

$$\delta_{21}=0;$$

$$g\delta_{25}=\frac{d(a+2b+2c+2d+2f+1)+bc+f(b+c+d+f)}{f^2}\cdot\alpha_{14}$$
$$+\frac{d(a+2b+2c+2d+2f+1)+bc+f(a+2b+2c+2d+2f+1)}{f^2}\cdot\alpha_{20}$$
$$+\frac{(b+d)(a+b+2c+2d+2f+1)+f(c+d+f)}{b'f}\cdot\alpha_{17}$$
$$-\frac{(a+b+2c+2d+f+1)g}{f}\cdot\alpha_{25}-\frac{(c+d+f)g}{f}\cdot\alpha_{26}+g^2\alpha_{28};$$

$$g\delta_{26}=-\frac{d(c+1)-b(a+2b+2d)+f(-3b+c-d-f+1)}{f^2}\cdot\alpha_{14}$$
$$-\frac{d(c+1)-b(a+2b+2d)+f(a-2b+2c+2)}{f^2}\cdot\alpha_{20}$$
$$+\frac{(b+d+f)(b-c+f-1)}{b'f}\cdot\alpha_{17}-\frac{(b-c+f-1)g}{f}\cdot\alpha_{25}$$
$$-\frac{(a+2b+d+f)g}{f}\cdot\alpha_{26}+g^2\alpha_{28};$$

$$g^2\delta_{28}=\frac{(b+d+f)g}{f^2}\cdot(\alpha_{14}+\alpha_{20})+\frac{(b+d+f)g}{b'f}\cdot\alpha_{17}-\frac{g^2}{f}\cdot\alpha_{25}-\frac{g^2}{f}\cdot\alpha_{26}$$
$$+g^2\alpha_{28}.-$$

c) Der Koeffizient von C_3C_3' muss identisch sein mit dem Ausdruck $-(u_2x_1^2x_2+u_3x_1^2x_3+u_4x_1x_2^2+u_5x_1x_2x_3+u_6x_1x_3^2)C_3$ $-(v_2x_1^2x_2+v_4x_1x_2^2+v_5x_1x_2x_3+v_8x_2^2x_3)C_3'$.

Die Koeffizientenvergleichung liefert nun folgende Relationen:

(1) $\alpha_9+\alpha_{13}-\delta_{11}-\delta_{13}+f\delta_{29}=-bu_2-au_3-d'v_2-c'v_5;$

(2) $\alpha_{13}=b'u_3;$

(3) $\alpha_7+\alpha_8+\alpha_{11}-g\alpha_{22}-g\alpha_{23}+g'\alpha_{25}+g'\alpha_{26}-2gg'\alpha_{28}-f\alpha_{29}-\delta_7$
$-\delta_9-\delta_{16}+2f\delta_{29}=-du_2-cu_3-bu_4-au_5-u_6-b'v_2-d'v_4$
$-a'v_5-c'v_8;$

(4) $$-\alpha_7-2\alpha_9-2\alpha_{11}-\alpha_{13}+g\alpha_{22}-g'\alpha_{26}+2f\alpha_{29}-f\delta_{29} = -fu_2-du_3-bu_5-au_6-f'v_2-d'v_5;$$

(5) $$\alpha_{11}+\alpha_{13}-f\alpha_{29} = -fu_3-bu_6;$$

(6) $$\alpha_{16}+\alpha_{17}-\delta_8-\delta_{17} = -du_4-cu_5-b'v_4-a'v_8;$$

(7) $$-\alpha_7-2\alpha_8-2\alpha_{16}-\alpha_{17}+g\alpha_{23}-g'\alpha_{25}+f\alpha_{29} = -fu_4-du_5-cu_6-f'v_4-b'v_5-d'v_8;$$

(8) $$\alpha_7+\alpha_9+\alpha_{16}-2f\alpha_{29} = -fu_5-du_6-f'v_5;$$

(9) $$f\alpha_{29} = -fu_6;$$

(10) $$\alpha_8+\alpha_{17} = -f'v_8;$$

(11) $$\alpha_{17} = b'v_8;$$

(12) $$\delta_9+\delta_{13} = v_2;$$

(13) $$-\delta_7-\delta_8-\delta_{11}+g\delta_{22}+g\delta_{23}-g'\delta_{25}-g'\delta_{26}+2gg'\delta_{28}+f\delta_{29} = -u_2-v_4;$$

(14) $$\delta_7+2\delta_9+2\delta_{11}+\delta_{13}-g\delta_{22}+g'\delta_{26}-2f\delta_{29} = -au_2-u_3-a'v_2-c'v_4-v_5;$$

(15) $$\delta_7+2\delta_8+2\delta_{16}+\delta_{17}-g\delta_{23}+g'\delta_{25}-f\delta_{29} = -cu_2-au_4-u_5-a'v_4-v_8;$$

(16) $$\delta_{13} = -c'v_2;$$

(17) $$\delta_{17} = -cu_4;$$

(18) $$\delta_{16}+\delta_{17} = u_4.$$

Als Lösungen dieses Gleichungssystemes erhält man:

$$\delta_7 = \frac{f'(a-b+c-d+1)+b'(-b+c+1)-dd'}{f'^2}\cdot\alpha_2$$
$$+\frac{f'(a-2d)+b'(-b+c+1)-dd'}{f'^2}\cdot\alpha_5+\alpha_7$$
$$-\frac{f'(b-c+2d+f)+d(b'+d')}{bf'}\cdot\alpha_{13}$$
$$-\frac{f(b'-c'+2d'+f')+d'(b+d)}{b'f}\cdot\alpha_{17}$$
$$+\frac{f(a'-b'-c'-d'+1)+b(-b'+c'+1)-dd'}{f^2}\cdot\alpha_{14}$$
$$+\frac{f(a'-2d')+b(-b'+c'+1)-dd'}{f^2}\cdot\alpha_{20}-\frac{f'g+dg'}{f'}\cdot\alpha_{22}$$
$$-\frac{f'g+(b-c-1)g'}{f'}\cdot\alpha_{23}+\frac{fg'+d'g}{f}\cdot\alpha_{25}+\frac{fg'+(b'-c'-1)g}{f}\cdot\alpha_{26}$$
$$+\frac{(b'+f')^2(-b+c+1)+bf'^2+(a'+c')df'-bb'd'-f'^2+af'(b'+2f')}{f'^2}\cdot\alpha_{29}$$
$$-2gg'\alpha_{28}+(d+2f)\cdot\delta_{29};$$

$$\delta_8 = -\frac{b'(c+d)+df'}{f'^2}\cdot\alpha_2 - \frac{b'(c+d)-cf'}{f'^2}\cdot\alpha_5 + \alpha_{16}$$
$$+\frac{(a'+b')-(b+d+2f)}{b'}\cdot\alpha_{17} - \frac{b'(d+f)}{f^2}\cdot\alpha_{14} - \frac{b'(d+2f)}{f^2}\cdot\alpha_{20}$$
$$-\frac{(c+d)g'}{f'}\cdot\alpha_{23} + \frac{b'g}{f}\cdot\alpha_{25} - \frac{(b'+f')(b'c+b'd+df')-cff'}{f'^2}\cdot\alpha_{29};$$

$$\delta_9 = -\frac{(b+f)(c'+1)}{f^2}\cdot\alpha_{14} - \frac{b(c'+1)}{f^2}\cdot\alpha_{20} + \frac{(c'+1)g}{f}\cdot\alpha_{26};$$

$$\delta_{11} = -\frac{b(d'+f')}{f'^2}\cdot\alpha_2 - \frac{b(d'+2f')}{f'^2}\cdot\alpha_5 + \alpha_9 - \frac{b(b'+d')+f'(b-a)}{bf'}\cdot\alpha_{13}$$
$$-\frac{b(c'+d')+d'f}{f^2}\cdot\alpha_{14} - \frac{b(c'+d')-c'f}{f^2}\cdot\alpha_{20} - \frac{bg'}{f'}\cdot\alpha_{22}$$
$$+\frac{(c'+d')g}{f}\cdot\alpha_{26} + \frac{(a'+c')bf'-bb'd'}{f'^2}\cdot\alpha_{29} + (b+f)\cdot\delta_{29};$$

$$\delta_{13} = \frac{(b+f)c'}{f^2}\cdot\alpha_{14} + \frac{bc'}{f^2}\cdot\alpha_{20} - \frac{c'g}{f}\cdot\alpha_{26};$$

$$\delta_{16} = -\frac{(b'+f')(c+1)}{f'^2}\cdot\alpha_2 - \frac{b'(c+1)}{f'^2}\cdot\alpha_5 - \frac{(c+1)g'}{f'}\cdot\alpha_{23}$$
$$-\frac{(b'+f')^2(c+1)}{f'^2}\cdot\alpha_{29};$$

$$\delta_{17} = \frac{(b'+f')c}{f'^2}\cdot\alpha_2 + \frac{b'c}{f'^2}\cdot\alpha_5 + \frac{cg'}{f'}\cdot\alpha_{23} + \frac{(b'+f')^2c}{f'^2}\cdot\alpha_{29}. -$$

Die Gleichungen 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 14, 15 und 17 müssen stimmen, wenn man die 3 letzten Bedingungsgleichungen, welche bei Aufsuchung der 12ten Relation festgesetzt worden sind, anwendet. —

In den ersten elf Relationen stellen die 10 Parameter a, b, c, d, f, a′, b′, c′, d′ und f′ 10 Moduln vor. Im § 4, wo die Gleichung der Kurve $f_8 = 0$ aufgestellt wird, kommen 25 vorderhand unbestimmte Koeffizienten vor; ebendaselbst werden aber 13 Bedingungsgleichungen aufgestellt, aus welchen man bestimmen kann die Koeffizienten α_{15}, α_1, α_4, α_6, α_{11}, α_3, α_8, α_{10}, α_{19}, α_{21}, α_7, α_{22} und α_{23}; es bleiben also in der Gleichung $f_8 = 0$, sowie in den letzten vier Relationen will-

kürlich in homogener Form die 12 Grössen: α_2, α_5, α_9, α_{13}, α_{14}, α_{16}, α_{17}, α_{20}, α_{25}, α_{26}, α_{28} und α_{29}, also in nicht homogener Form die 11 Parameter $\frac{\alpha_2}{\alpha_{29}}$, $\frac{\alpha_5}{\alpha_{29}}$, $\frac{\alpha_9}{\alpha_{29}}$, $\frac{\alpha_{13}}{\alpha_{29}}$, $\frac{\alpha_{14}}{\alpha_{29}}$, $\frac{\alpha_{16}}{\alpha_{29}}$, $\frac{\alpha_{17}}{\alpha_{29}}$, $\frac{\alpha_{20}}{\alpha_{29}}$, $\frac{\alpha_{25}}{\alpha_{29}}$, $\frac{\alpha_{26}}{\alpha_{29}}$ und $\frac{\alpha_{28}}{\alpha_{29}}$, welche die noch fehlenden 11 Moduln der Klasse sind.